

PLANS EN BLOCS “PAIRWISE” PARTIELLEMENT ÉQUILIBRÉS RÉSOLVABLES ET PLANS NUMÉRIQUES “SPACE FILLING” ASSOCIÉS

Imane Rezgui & Z. GHeribi-Aoulmi

Département de Mathématiques, Université Constantine 1, Algérie

Résumé. Les plans d'expérience numériques continuent toujours à susciter la curiosité des scientifiques dans divers domaines (Médecine : Electrophorèse capillaire (Lee et al. (1997)), Informatique : la programmation multi-objectifs (Leung et Wang (2000)). etc...). Parmi les différentes méthodes de construction de ces plans, les plans classiques qui satisfont certaines propriétés combinatoires peuvent être utilisés comme plans de base (par exemple Fang et al. (2004) et Fang et al. (2005)). Dans notre papier, une méthode de construction à partir de schémas d'association à m classes associées est décrite pour obtenir une série de plans "Pairwise" Partiellement Equilibrés résolubles rendant ainsi leur construction très aisée. L'expression des paramètres de ces plans est donnée. L'application de l'algorithme "RBIBD – UD" Fang et al. (2006) permet l'obtention des plans numériques "Space filling " associés. Une illustration de la méthode de construction est effectuée, en considérant un schéma d'association rectangulaire.

Mots-clés. Schéma d'association, Schéma d'association rectangulaire, Plan d'expérience numérique, Plan "Pairwise" partiellement équilibré.

Abstract. The computer experimental designs are still attracting the curiosity of scientists in various areas (medicine : Capillary electrophoresis (Lee et al. (1997)), Computer Sciences : the multiobjective programming (Leung and Wang (2000)). Among the different construction methods of these designs, the traditional designs which satisfy certain combinatorial properties can be used as basic designs (for example Fang et al. (2004) and Fang et al. (2005)). In our paper, a construction method from association schemes with m associated classes is described to obtain a series of designs we propose a series of resolvable partially pairwise balanced designs *RPPBD* making their construction very easy. The parameters expression of these designs is given. The application of the algorithm "RBIBD – UD" (Fang et al. (2006)) allows the obtaining of the associated Computer experimental "Space filling" designs. An illustration of the construction method is effected , considering a rectangular association scheme.

Keywords. Association scheme, Computer experimental design, Rectangular association scheme, Partially pairwise balanced design.

La configuration des plans en blocs “pairwise” a toujours été un problème malgré l'existence de quelques méthodes de construction (Voir Mohan et Kageyama (1987), Rodger et al. (1987) et Matsubara et Kageyama (2014)). Dans ce travail, nous développons

une méthode de construction, dite “ASC-RPPBD” pour fournir une nouvelle série de plans *PBPPER*. Par application de l’algorithme *RBIBD – UD* de Fang (Voir Fang et al. (2006)), nous obtenons une série de plans numériques “space filling” associés à nos plans. Nous illustrons la configuration d’un plan *PBPPER* et le plan “space filling” associé par un exemple en utilisant le schéma d’association rectangulaire.

Définition 1. *Un schéma d’association à m classes associées ($m \geq 2$) est une relation entre n traitements satisfaisant les conditions suivantes :*

- (i) *Deux traitements sont, soit 1^{ers} , 2^{emes} , \dots , ou m^{emes} associés, la relation d’association étant symétrique ie si le traitement α est i^{emes} associé au traitement β alors le traitement β est i^{emes} associé au traitement α .*
- (ii) *Chaque traitement α a n_i traitements i^{emes} associés. Le nombre n_i est indépendant de α .*
- (iii) *Si deux traitements α et β sont i^{emes} associés, alors le nombre de traitements qui sont j^{emes} associés à α et k^{emes} associés à β est noté p_{jk}^i et est indépendant du couple de traitements i^{emes} associés.*

Définition 2. *Soit K un ensemble d’entiers positifs et I un ensemble d’entiers non négatifs. Un *PBPPE* est une pair $(V; B)$ qui satisfait les propriétés suivantes :*

1. *V est un ensemble de v traitements appelés points.*
2. *B est une famille de sous ensembles de V appelés blocs.*
3. *Chaque bloc est de taille $k \in K$.*
4. *Chaque couple de points est contenu dans λ blocs ($\lambda \in I$).*

Définition 3. *Soit $(V; B)$ un *PBPPE*. Une classe parallèle dans $(V; B)$ est une collection de blocs disjoints dont l’union est V .*

Une partition de B en classes parallèles est appelée une résolution.

*(V, B) est dit résolvable, noté (*PBPPER*), si B admet au moins une résolution.*

Définition 4. *Un plan numérique “space filling” est une matrice $X = (x^1, \dots, x^r)$ d’ordre $v \times r$ sachant que la i^{eme} colonne x^i prend les valeurs d’un ensemble d’éléments $\{1, \dots, q_i\}$. Les lignes et les colonnes de la matrice sont respectivement les essais et les facteurs du plan. L’ensemble $\{1, \dots, q_i\}$ constitue les différents niveaux du facteur j ($j=1, \dots, r$).*

1 Méthode de Construction de plans en blocs “pairwise” partiellement équilibrés résolubles via un schéma d’association

V un schéma d’association de paramètres v, n_i ($n_i \geq 2, i = 1, 2, \dots, m$) et p_{jk}^i ($i, j, k = 0, 2, \dots, m$).

Pour l’obtention des blocs du *PBPPER*, nous procédons comme suit :

Pour chaque traitement α :

- Le traitement α et ses premiers associés constituent un bloc.
- Les n_i traitements i^{eme} associés à α ($i = 2, \dots, m$) constituent chacun un bloc.

L’union de ces m blocs constitue la Classe Parallèle CP_α associée à α . Ainsi $\bigcup_{\alpha \in V} CP_\alpha$ donne un *PBPPER*.

Théorème 1. *Les plans en blocs obtenus à partir de la méthode de construction “SCH – PBPPER” sont des plans en blocs “pairwise” partiellement équilibrés résolubles (PEPPER) de paramètres :*

$$v, b = mv, r = v, K = \{n_1 + 1, n_2, \dots, n_m\},$$

$$I = \left\{ \sum_{j=1}^m p_{jj}^1 + 2, \sum_{j=1}^m p_{jj}^2, \dots, \sum_{j=1}^m p_{jj}^m \right\}$$

Exemple 1. *Soit $v = 12 = 3.4$, ($n = 3$ et $l = 4$) traitements rangés dans le tableau suivant :*

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12

Le PBPPER rectangulaire obtenu à partir de la méthode “SCH – PBPPER” et le schéma d’association rectangulaire précédent a pour paramètres :

$$v = 12, b = 36, r = 12, k = \{2, 4, 6\}, I = \{2, 4, 8\}.$$

Et pour configuration :

$\{1, 2, 3, 4\}$	$\{5, 9\}$	$\{6, 7, 8, 10, 11, 12\}$
$\{1, 2, 3, 4\}$	$\{6, 10\}$	$\{5, 7, 8, 9, 11, 12\}$
$\{1, 2, 3, 4\}$	$\{7, 11\}$	$\{5, 6, 8, 9, 10, 12\}$
$\{1, 2, 3, 4\}$	$\{8, 12\}$	$\{5, 6, 7, 9, 10, 11\}$
$\{5, 6, 7, 8\}$	$\{1, 9\}$	$\{2, 3, 4, 10, 11, 12\}$
$\{5, 6, 7, 8\}$	$\{2, 10\}$	$\{1, 3, 4, 9, 11, 12\}$
$\{5, 6, 7, 8\}$	$\{3, 11\}$	$\{1, 2, 4, 9, 10, 12\}$
$\{5, 6, 7, 8\}$	$\{4, 12\}$	$\{1, 2, 3, 9, 10, 11\}$
$\{9, 10, 11, 12\}$	$\{1, 5\}$	$\{2, 3, 4, 6, 7, 8\}$
$\{9, 10, 11, 12\}$	$\{2, 6\}$	$\{1, 3, 4, 5, 7, 8\}$
$\{9, 10, 11, 12\}$	$\{3, 7\}$	$\{1, 2, 4, 5, 6, 8\}$
$\{9, 10, 11, 12\}$	$\{4, 8\}$	$\{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$

2 Construction des plans numériques “space filling” à partir des plans en blocs “pairwise” partiellement équilibrés

L’algorithme de Fang pour la construction des plans numériques “U-Type” via un *PBPPER* est le suivant :

2.1 L’algorithme *RBIBD – UD*

- Etape.1 : Numéroté de 1 à q les q blocs dans chaque classe parallèle CP_j , $j = 1, \dots, r$.
- Etape.2 : Pour chaque CP_j , construire une colonne $x^j = (x_{\alpha j})$ à m niveaux comme suit :
 $x_{\alpha j} = u$, si le traitement α est contenu dans le u^{eme} bloc du CP_j , $u = 1, 2, \dots, q$.
- Etape.3 : Les r colonnes de q niveaux construites à partir des CP_j , $j = 1, \dots, r$ constituent un plan numérique “U-Type”.

Soit un *PBPPER* de paramètres définis dans le Théorème 1. En lui appliquant l’algorithme de Fang, nous obtenons un plan “space filling”.

Proposition 1. *Soit un plan en blocs “pairwise” partiellement équilibré résolvable à m classes associées de paramètres :*

$$v, b = mv, r = v, K = \{n_1 + 1, n_2, \dots, n_m\},$$

$$I = \left\{ \sum_{j=1}^m p_{jj}^1 + 2, \sum_{j=1}^m p_{jj}^2, \dots, \sum_{j=1}^m p_{jj}^m \right\}$$

Il engendre un plan numérique “space filling” de v essais et $r = v$ facteurs à m niveaux chacun.

Exemple 2. Considérons le plan “pairwise” rectangulaire de l’Exemple 1 et appliquons l’algorithme de Fang, nous obtenons le plan “space filling” :

<i>Essais</i> \ <i>Facteurs</i>	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}
1	1	1	1	1	2	3	3	3	2	3	3	3
2	1	1	1	1	3	2	3	3	3	2	3	3
3	1	1	1	1	3	3	2	3	3	3	2	3
4	1	1	1	1	3	3	3	2	3	3	3	2
5	2	3	3	3	1	1	1	1	2	3	3	3
6	3	2	3	3	1	1	1	1	3	2	3	3
7	3	3	2	3	1	1	1	1	3	3	2	3
8	3	3	3	2	1	1	1	1	2	3	3	2
9	2	3	3	3	2	3	3	3	1	1	1	1
10	3	2	3	3	3	2	3	3	1	1	1	1
11	3	3	2	3	3	3	2	3	1	1	1	1
12	3	3	3	2	3	3	3	2	1	1	1	1

3 Conclusion

Notre méthode de construction “SCH – PBPPER” est peu exigeante et permet de fournir une série de PBPPER via seulement les schémas d’association. Les expressions des paramètres sont données.

Les plans ainsi construits peuvent-être considérés comme un outil de base pour obtenir une série de plans numériques “space filling”.

Ces résultats constituent une partie d’un proceeding “accepté” :

Rezgui, I., Laib, M. & Gheribi-Aoulmi, Z (2015). New series of resolvable partially pairwise balanced designs and their associated space filling designs. **Afrika Statistika.**

Bibliographie

- [1] Bailey, R. A. (2004), *Association Schemes Designed Experiments, Algebra and Combinatorics*, Cambridge University Press, 2004.
- [2] Bose, R.C. et Nair, K. R. (1939), Partially balanced incomplete block designs, *Sankhya*, 4, 337–372.
- [3] Fang, K.T. , Ge, G. N. et Liu M. (2004), Construction of uniform designs via super-simple resolvable t-designs, *Utilitas Mathematica*, 66, 15–32.
- [4] Fang, K.T., Tang, Y. et Yin J.X. (2005), Resolvable partially pairwise balanced designs and their applications in computer experiments, *Utilitas Mathematica*, 70, 141–157.
- [5] Fang, K. T., Li R., et Sudjianto Ag. (2006), *Design and Modeling for Computer Experiments*, Taylor & Francis Group, LLC.
- [6] Lee , A. W. M., Chan, W. F., Yuen, F. S.Y., Tse, P. K., Liang, Y. Z. et Fang, K. T. (1997). An example of a sequential uniform design : application in capillary electrophoresis, *Chemometrics and intelligent laboratory Systems*, 39, 11–18.
- [7] Leung Y.W et Wang Y. (2000), Multiobjective Programming Using Uniform Design and Genetic Algorithm, *IEEE Transactions on systems, man, and cybernetics- Part C : Application and Reviews*,, 30, 293–304.
- [8] Matsubara, K. et Kageyama, S. (2014), The Construction of Pairwise Additive Minimal BIB Designs with Asymptotic Results, *Applied Mathematics*, 5, 2130–2136.
- [9] Mohan, R. N. et Kageyama, S. (1987), A note on pairwise balanced and partially balanced designs. *Indian J. pure appl. Math*, 18, 871–875.
- [10] Rodger, C.A., Sarvate, D. G. et Seberry, J. (1987), *Colorued designs, new group divisible designs and pairwise balanced designs. Journal of statistical planning and inference*, 15, 379–389.