

ÉLÉMENTS SPECTRAUX D'UNE FONCTION CYCLOSTATIONNAIRE

Alain BOUDOU¹ & Sylvie VIGUIER-PLA^{1& 2}

¹ *Equipe de Stat. et Proba., Institut de Mathématiques, UMR5219
Université Paul Sabatier, 118 Route de Narbonne, F-31062 Toulouse Cedex 9, France
boudou@math.univ-toulouse.fr, viguier@math.univ-toulouse.fr*

² *Université de Perpignan Via Domitia
52 av. Paul Alduy - F-66860 Perpignan Cedex 9*

Résumé. Considérant une fonction cyclostationnaire, nous montrons qu'on peut lui associer une et une seule mesure spectrale. De plus, moyennant une hypothèse de continuité supplémentaire, nous sommes en mesure de lui associer également une série stationnaire unique, qui peut se prêter à une analyse en composantes principales dans le domaine des fréquences.

Mots-clés. Fonction cyclostationnaire, mesure aléatoire, mesure spectrale, opérateur unitaire

Abstract. Considering a cyclostationary function, we show that it can be associated with one, and only one, spectral measure. Moreover, with a supplementary hypothesis of continuity, it can also be associated with a unique stationary series, which can be the object of a study by principal components analysis in the frequency domain.

Keywords. Cyclostationary function, random measure, spectral measure, unitary operator

1 Introduction

Un processus est dit cyclostationnaire lorsqu'il présente des propriétés qui varient de façon cyclique dans le temps. Dans la littérature, de nombreux phénomènes physiques sont modélisés par une hypothèse de cyclostationnarité (cf., par exemple, Sabri et al., 2010). La covariance, ainsi que d'autres éléments relatifs à la cyclostationnarité, ont fait l'objet de nombreuses études (cf. Gardner et al., 2006, pour une revue bibliographique).

À notre connaissance, on n'a pas donné d'une fonction cyclostationnaire une représentation sous forme d'intégrale stochastique, c'est ce que nous proposons de faire ici grâce à une mesure spectrale, à valeurs projecteurs. Moyennant une hypothèse de continuité, une partition de $\mathbb{R}$ nous permet d'obtenir une série stationnaire dont nous précisons la mesure aléatoire dont elle est la transformée de Fourier. La façon dont nous construisons cette série stationnaire présente une analogie avec la façon dont on construit une série p -dimensionnelle stationnaire à partir d'une série p -cyclostationnaire unidimensionnelle.

2 Mesure aléatoire, mesure spectrale, et opérateur unitaire

Dans cet exposé, $\mathcal{B}$ désigne la trace de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, tribu de Borel de $\mathbb{R}$, sur $\Pi = [-\pi; \pi[$. Comme de l'espace des variables aléatoires $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ on n'utilise, du point de vue mathématique, que le caractère hilbertien, les processus que nous considérons prennent leurs valeurs dans un $\mathbb{C}$ -espace de Hilbert, souvent noté H . Lorsque H est un tel espace, nous désignons par $\mathcal{P}(H)$ l'ensemble de ses projecteurs orthogonaux.

Une mesure aléatoire (m.a.) Z , à valeurs dans le $\mathbb{C}$ -Hilbert H , est une mesure vectorielle, définie sur $\mathcal{B}$, prenant ses valeurs dans H , telle que $\langle ZA, ZB \rangle = 0$, pour tout couple (A, B) d'éléments disjoints de $\mathcal{B}$.

Le résultat suivant est bien connu.

L'application $\mu_Z : A \in \mathcal{B} \mapsto \|ZA\|^2 \in \mathbb{R}_+$ est une mesure bornée.

L'intégrale stochastique, relativement à la m.a. Z , peut être définie comme l'unique isométrie de $L^2(\Pi, \mathcal{B}, \mu_Z)$ sur $\overline{\text{vect}\{ZA; A \in \mathcal{B}\}}$ qui à 1_A associe ZA , cela quelque soit A de $\mathcal{B}$. L'image d'un élément φ est notée $\int \varphi dZ$.

Une famille $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ d'éléments du $\mathbb{C}$ -Hilbert H est une série stationnaire lorsque $\langle X_n, X_m \rangle = \langle X_{n-m}, X_0 \rangle$, pour tout couple (n, m) d'éléments de $\mathbb{Z}$.

A toute série stationnaire $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ d'éléments de H , on peut associer une m.a. Z , et une seule, à valeurs dans H , telle que $X_n = \int e^{i \cdot n} dZ$, pour tout n de $\mathbb{Z}$.

Deux séries stationnaires $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et $(X'_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ sont stationnairement corrélées lorsque $\langle X_n, X'_m \rangle = \langle X_{n-m}, X'_0 \rangle$, pour tout couple (n, m) d'éléments de $\mathbb{Z}$.

Examinons maintenant la notion de mesure à valeurs projecteurs.

Une mesure spectrale (m.s.) $\mathcal{E}$ pour le $\mathbb{C}$ -Hilbert H , est une application de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{P}(H)$ telle que

- i) $\mathcal{E}\Pi = I_H$;*
- ii) $\mathcal{E}(A \cup B) = \mathcal{E}A + \mathcal{E}B$, pour tout couple (A, B) d'éléments disjoints de $\mathcal{B}$;*
- iii) pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{B}$ qui converge en décroissant vers $\emptyset$, et pour tout X de H , nous avons $\lim \mathcal{E}A_n X = 0$.*

Il est facile de vérifier ce qui suit.

Pour tout X de H , l'application $Z_{\mathcal{E}}^X : A \in \mathcal{B} \mapsto \mathcal{E}AX \in H$ est une m.a. à valeurs dans H ,

et

l'application $X \in H \mapsto \int e^{i \cdot 1} dZ_{\mathcal{E}}^X \in H$ est un opérateur unitaire.

Nous avons aussi la réciproque.

À tout opérateur unitaire U du $\mathbb{C}$ -Hilbert H , on peut associer une m.s. $\mathcal{E}$, et une seule, telle que $UX = \int e^{i \cdot 1} dZ_{\mathcal{E}}^X$, pour tout X de H .

Enfin, toute série stationnaire peut être construite comme suit.

Si $\mathcal{E}$ est la m.s. associée à un opérateur unitaire U , alors, pour tout X de H , $(U^n X)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une série stationnaire de m.s. associée $Z_{\mathcal{E}}^X$.

3 Δ -cyclostationnarité

Désormais, Δ désigne un élément de $\mathbb{R}_+^*$.

Une famille $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ d'éléments du $\mathbb{C}$ -Hilbert H est une fonction aléatoire Δ -cyclostationnaire lorsque $\langle X_{t_1}, X_{t_2} \rangle = \langle X_{t_1+n\Delta}, X_{t_2+n\Delta} \rangle$, pour tout couple (t_1, t_2) d'éléments de $\mathbb{R}$, et pour tout n de $\mathbb{Z}$.

Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ une fonction aléatoire Δ -cyclostationnaire, posons $H_X = \overline{\text{vect}}\{X_t; t \in \mathbb{R}\}$.

Il est bien connu que

si $\{X_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ et $\{X'_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ sont respectivement des familles de H et H' , $\mathbb{C}$ -espaces de Hilbert, telles que $\langle X_{\lambda_1}, X_{\lambda_2} \rangle = \langle X'_{\lambda_1}, X'_{\lambda_2} \rangle$ pour tout couple d'éléments de Λ , alors il existe une isométrie U , et une seule, de $\overline{\text{vect}}\{X_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ sur $\overline{\text{vect}}\{X'_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ telle que $UX_\lambda = X'_\lambda$, pour tout λ de Λ .

Donc si l'on considère les familles $\{X_t; t \in \mathbb{R}\}$ et $\{X_{t+\Delta}; t \in \mathbb{R}\}$ d'éléments du $\mathbb{C}$ -Hilbert H , la définition de la cyclostationnarité nous permet d'affirmer qu'il existe une isométrie U , et une seule, de H_X sur $\overline{\text{vect}}\{X_{t+\Delta}; t \in \mathbb{R}\}$, telle que $UX_t = X_{t+\Delta}$, pour tout t de $\mathbb{R}$. Comme $\overline{\text{vect}}\{X_{t+\Delta}; t \in \mathbb{R}\} = H_X$, ce qui précède s'énonce de la façon suivante.

Il existe un opérateur unitaire U , et un seul, de H_X , tel que $UX_t = X_{t+\Delta}$, pour tout t de $\mathbb{R}$.

Utilisant des récurrences, nous pouvons démontrer que

$$U^n X_t = X_{t+n\Delta}, \text{ pour tout } (n, t) \text{ de } \mathbb{Z} \times \mathbb{R}.$$

Désignons par $\mathcal{E}$ la m.s., sur H_X , associée à l'opérateur unitaire U , que nous venons de définir, les rappels vus précédemment permettent d'affirmer que

$(X_{t+n\Delta})_{n \in \mathbb{Z}}$ est une série stationnaire de m.a. associée $Z_{\mathcal{E}}^{X_t}$, pour tout t de $\mathbb{R}$, et donc

$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{Z}, X_{t+n\Delta} = \int e^{i \cdot n} dZ_{\mathcal{E}}^{X_t}, \text{ cela quelque soit } t \text{ de } \mathbb{R}.$$

Désignons par $[x]$ la partie entière d'un réel x . Nous pouvons affirmer que, pour tout réel t , $t - \Delta[\frac{t}{\Delta}]$ appartient à $E = [0, \Delta[$ et nous pouvons donc considérer l'application $\alpha : t \in \mathbb{R} \mapsto t - \Delta[\frac{t}{\Delta}] \in E$. Pour tout (n, t) de $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$, nous avons $\alpha(t+n\Delta) = \alpha(t)$. Comme $X_t = X_{\alpha(t) + [\frac{t}{\Delta}]\Delta}$, nous pouvons écrire $X_t = \int e^{i \cdot [\frac{t}{\Delta}]} dZ_{\mathcal{E}}^{X_{\alpha(t)}}$. Nous pourrions démontrer que, si $\mathcal{E}'$ est une autre m.s., sur H_X , telle que $X_t = \int e^{i \cdot [\frac{t}{\Delta}]} dZ_{\mathcal{E}'}^{X_{\alpha(t)}}$, pour tout t de $\mathbb{R}$, alors $\mathcal{E}' = \mathcal{E}$. L'ensemble de ces résultats peut être énoncé comme suit.

Il existe une m.s. $\mathcal{E}$, et une seule, sur H_X , telle que $X_t = \int e^{i \cdot [\frac{t}{\Delta}]} dZ_{\mathcal{E}}^{X_{\alpha(t)}}$, pour tout t de $\mathbb{R}$.

Ce résultat nous permet d'associer d'une façon biunivoque une m.s. à une fonction Δ -cyclostationnaire. Il est à rapprocher de la représentation sous forme d'intégrale stochastique d'une fonction aléatoire continue stationnaire.

4 Ampliation

Dans ce paragraphe, H désigne un $\mathbb{C}$ -Hilbert. Munissons E de la tribu ξ , trace de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ sur E . Comme E est un borélien de $\mathbb{R}$, tout élément de ξ , en tant que sous-ensemble de $\mathbb{R}$, appartient à $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ et nous pouvons donc considérer l'application $\eta : A \in \xi \mapsto \mu(A) \in \mathbb{R}_+$, où μ est la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}$. Il est clair que η est une mesure bornée. Il est facile de vérifier que si (K, X) est élément de $\mathcal{L}(H_X) \times \mathcal{L}_H^2(E, \xi, \eta)$, alors $K \circ X$ appartient à $\mathcal{L}_H^2(E, \xi, \eta)$ et que si (X, Y) est un couple d'éléments de $\mathcal{L}_H^2(E, \xi, \eta)$, égaux η -presque partout, donc représentants d'un même élément de $L_H^2(E, \xi, \eta)$, il en est de même du couple $(K \circ X, K \circ Y)$. Cela nous permet de définir l'ampliation d'un élément de $\mathcal{L}(H)$ de la façon suivante.

Nous appelons ampliation d'un élément K de $\mathcal{L}(H_Z)$ l'application $\tilde{K} : \bar{X} \in L_H^2(\xi) \mapsto \overline{K \circ X} \in L_H^2(\xi)$, qui appartient à $\mathcal{L}(L_H^2(\xi))$.

Nous montrons alors le résultat suivant.

Pour tout couple (K_1, K_2) d'éléments de $\mathcal{L}(H_X)$, nous avons $\widetilde{K_1 \circ K_2} = \widetilde{K_1} \circ \widetilde{K_2}$, et, si P (resp. U) est un projecteur (resp. opérateur unitaire) de H , alors son ampliation $\tilde{P}$ (resp. $\tilde{U}$) est un projecteur (resp. opérateur unitaire) de $L_H^2(E, \xi, \mu)$.

Comme l'ampliation d'un projecteur est un projecteur, si $\mathcal{E}$ est une m.s. sur H , pour tout A de $\mathcal{B}$, $\mathcal{E}A$, ampliation du projecteur $\mathcal{E}A$, est un projecteur de $L_H^2(E, \xi, \eta)$, et nous avons donc ce qui suit.

L'application $\tilde{\mathcal{E}} : A \in \mathcal{B} \mapsto \tilde{\mathcal{E}}A \in \mathcal{P}(L_H^2(E, \xi, \eta))$, est une m.s., sur $L_H^2(E, \xi, \eta)$, appelée ampliation de la m.s. $\mathcal{E}$ sur H .

Enfin, considérons l'opérateur unitaire associé.

L'opérateur unitaire $\tilde{U}$, ampliation de l'opérateur unitaire U , a pour m.s. associée $\tilde{\mathcal{E}}$, ampliation de $\mathcal{E}$ m.s. associée à U .

Utilisons maintenant le fait que l'ampliation d'une application composée est la composée des ampliations.

Si $\tilde{U}$ est l'ampliation d'un opérateur unitaire U de H , alors $\tilde{U}^n = \widetilde{U^n}$, pour tout n de $\mathbb{Z}$.

5 Mesure aléatoire associée à une fonction Δ -cyclostationnaire

Reprenant les notations du paragraphe 3, nous allons appliquer les résultats que nous venons d'obtenir à la fonction Δ -cyclostationnaire $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$, moyennant l'hypothèse supplémentaire suivante.

Nous supposons que l'application : $t \in \mathbb{R} \mapsto X_t \in H$ est continue.

Nous déduisons que

l'application $Y_0 : t \in E \mapsto X_t \in H_X$ est représentant d'un élément de $L^2_{H_X}(E, \xi, \eta)$.

Nous pouvons affirmer ainsi que $(\tilde{U}^n \bar{Y}_0)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une série d'éléments de $L^2_{H_X}(E, \xi, \eta)$, stationnaire, de m.a. associée $Z = Z_{\tilde{\varepsilon}}^{\bar{Y}_0}$.

Utilisant la définition de l'ampliation, ces résultats peuvent se formuler de la façon suivante.

Pour tout n de $\mathbb{Z}$, l'application $t \in E \mapsto X_{t+n\Delta} \in H_X$ est représentant de $\tilde{U}^n \bar{Y}_0$, élément de $L^2_{H_X}(E, \xi, \eta)$;

pour tout A de $\mathcal{B}$, l'application $t \in E \mapsto \mathcal{E}AX_t \in H_X$ est représentant de ZA , élément de $L^2_{H_X}(E, \xi, \eta)$.

La série stationnaire $(\tilde{U}^n \bar{Y}_0)_{n \in \mathbb{Z}}$ est obtenue grâce à une partition de $\mathbb{R}$, $\{[n\Delta; (n+1)\Delta]; n \in \mathbb{Z}\}$, qui permet le regroupement de la famille $\{X_t; t \in \mathbb{R}\}$ suivant : $\{\{X_{t+n\Delta}; t \in [0; \Delta]; n \in \mathbb{Z}\}$.

Dans Cabral (2010), il est exposé un résultat analogue lorsqu'à une série $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, p -cyclostationnaire (c'est-à-dire telle que $\langle X_n, X_m \rangle = \langle X_{n+p}, X_{m+p} \rangle$) on associe la série p -dimensionnelle stationnaire $(Y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, où $Y_n = (X_{np}, X_{np+1}, \dots, X_{np+p-1})$, pour tout couple (n, m) d'éléments de $\mathbb{Z}$. Cette série est telle que $E(Y_n \bar{Y}_m) = E(Y_{n-m} \bar{Y}_0)$, propriété plus forte que $\langle Y_n, Y_m \rangle = \langle Y_{n-m}, Y_0 \rangle$, due au fait que les séries stationnaires composantes $(X_{np+k})_{n \in \mathbb{Z}}$, $k = 0, \dots, p-1$, sont stationnairement corrélées deux à deux, tout comme, dans le cas d'une fonction Δ -cyclostationnaire, $\{(X_{t+n\Delta})_{n \in \mathbb{Z}}; t \in [0; \Delta]\}$ est une famille de séries stationnaires stationnairement corrélées deux à deux. C'est pour cette dernière raison que l'on pourrait, au moyen d'une analyse en composantes principales dans le domaine des fréquences (cf. Boudou et Dauxois, 1994), résumer la fonction Δ -stationnaire $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ par une série stationnaire.

Bibliographie

- [1] Boudou, A. and Dauxois, J. (1994). Principal component analysis for a stationary random function defined on a locally compact abelian group. *J. Multivariate Anal.* **51** no. 1, 1-16.
- [2] Cabral, E. N. (2010). *Etude spectrale de processus stationnaires multidimensionnels et Analyse en Composantes Principales dans le domaine des fréquences*. Thèse de Doctorat,

Université Paul Sabatier, Toulouse.

[3] Gardner, W.A., Napolitano, A. and Paura, L. (2006). Cyclostationary: half a century of research. *Signal Processing*, **86** 639-697.

[4] Sabri, K., El Badaoui, M., Guillet, F., Belli, A., Millet, G. and Morin, J.B. (2010). Cyclostationary modelling of ground reaction force signals. *Signal Processing*, **90** 1146-1152.