

SUR LE CALCUL D'UNE MOYENNE DE SURFACES FONCTIONNELLES

Benjamin Charlier ¹, Nicolas Charon ² & Alain Trouvé ³

¹ *Institut de Mathématiques et de Modélisation de Montpellier, Université de Montpellier, France.*

² *Center for Imaging Science, Johns Hopkins university, Baltimore, United States.*

³ *Centre de Mathématiques et Leurs Applications, École Normale Supérieure, Cachan, France.*

Résumé. On appelle surface fonctionnelle une surface géométrique sur laquelle est définie une fonction à valeurs réelles. Ce type de données, très courant en imagerie médicale, reste complexe à étudier d'un point de vue statistique. Pour analyser un jeu de données composé de surfaces fonctionnelles, il est nécessaire de modéliser et de quantifier les variations géométriques et fonctionnelles de manières jointes. Dans cet exposé, nous décrivons un cadre mathématique et numérique pour calculer une moyenne de surfaces fonctionnelles à la manière des modèles statistiques de déformations. Le cadre mathématique permet de montrer que les formulations variationnelles proposées pour résoudre ce problème possèdent bien des solutions. Une méthode de résolution algorithmique est implémentée dans le logiciel `fshapesTk` qui est disponible en ligne.

Mots-clés. Traitement d'images, Données en grandes dimensions, Apprentissage et classification.

Abstract. A functional surface (a.k.a. `fshapes`) is a signal function supported on a geometrical surface. This type of data which is very common in medical imaging is still challenging to analyse on a statistical point of view. Analysing variability of `fshapes` ensembles require the modelling and quantification of joint variations in geometry and signal. In this talk, we describe a mathematical and numerical framework for computing a mean template in the spirit of deformable statistical models. We propose variational formulations of the mean template estimation problem and we prove the existence of solutions for the different models. An algorithmic method has been implemented in the `fshapesTk` software available online.

Keywords. Image treatment, Large dimension, Statistical learning and clustering.

1 Préambule

Cet exposé présente à l'attention de la communauté statistique les travaux exposés dans les articles Charon & Trouvé (2013) et Charlier, Charon, Trouvé (2014), ainsi que `fshapesTk`

qui est une boîte à outils `matlab` permettant de calculer des moyennes de formes fonctionnelles. Le logiciel `fshapesTk` est disponible à l'adresse suivante : <https://github.com/fshapes/fshapesTk>). L'enjeu de ces recherches est de définir un cadre mathématique cohérent qui doit permettre le traitement statistique de données complexes issues de l'imagerie médicale.

2 Types de données et positionnement du problème

Nous étudions des surfaces texturées encore appelées *surfaces fonctionnelles* ou *fshapes*. Chaque observation est un couple (X, f) où X est une surface de \mathbb{R}^3 (la géométrie) et $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est un champ scalaire défini sur X (le signal). Dans la pratique ce type de données est le plus souvent issu de la segmentation d'images 2d ou 3d. Les données sont supposées être des surfaces à maillage triangulaire auxquelles s'ajoute une valeur de signal en chaque sommet du maillage, voir la Figure 1.

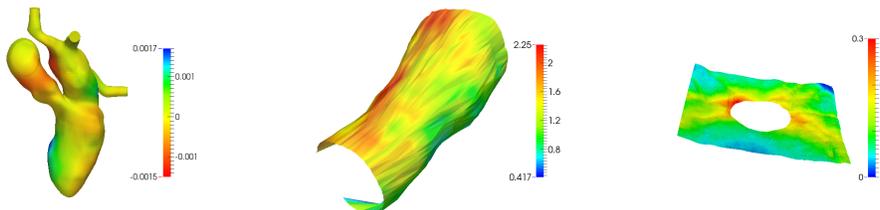


Figure 1: Trois exemples de surfaces fonctionnelles : à gauche la pression du flux sanguin à la surface d'un cœur (données de C. Chnafa, S. Mendez et F. Nicoud, université de Montpellier), au centre l'épaisseur d'un hippocampe (données O. Colliot, INRIA) et à droite l'épaisseur de la rétine (M. Suranic, S. Lee, F. Beg, Simon Fraser University)

Le traitement statistique des surfaces fonctionnelles peut rentrer dans le cadre des modèles de déformations non rigides, voir Allasonnière et al. (2013). De manière générale, les observations Y^i sont supposées à valeurs dans un espace de Hilbert \mathcal{H} sur lequel agit un groupe de déformations \mathcal{G} , c'est à dire que pour tout $(\gamma, Y) \in \mathcal{G} \times \mathcal{H}$ l'action à gauche de γ notée \cdot est telle que $\gamma \cdot Y \in \mathcal{H}$. On suppose alors que les observations Y^i satisfont un modèle de la forme :

$$Y^i = \gamma_i^* \cdot Y^* + \varepsilon^i$$

où Y^* est une moyenne (souvent appelée *template*) inconnue, les $\gamma_i^* \in \mathcal{G}$ sont les déformations inconnues et ε^i est un terme de perturbation aléatoire dans \mathcal{H} . Estimer (X^*, f^*) et les γ_i^* à partir des Y^i est ce que l'on appelle ici calculer un *atlas*.

Le but de cette présentation est d’expliquer le cadre mathématique et la méthodologie utilisée dans `fshapesTk` permettant de calculer un atlas de surfaces fonctionnelles, c’est à dire une forme fonctionnelle moyenne (\bar{X}, \bar{f}) qui est pensée comme l’estimation d’une template idéale (X^*, f^*) , et des déformations γ^i (estimation des γ_i^*) à partir des observations (X^i, f^i) où $i = 1, \dots, N$, voir Figure 2.

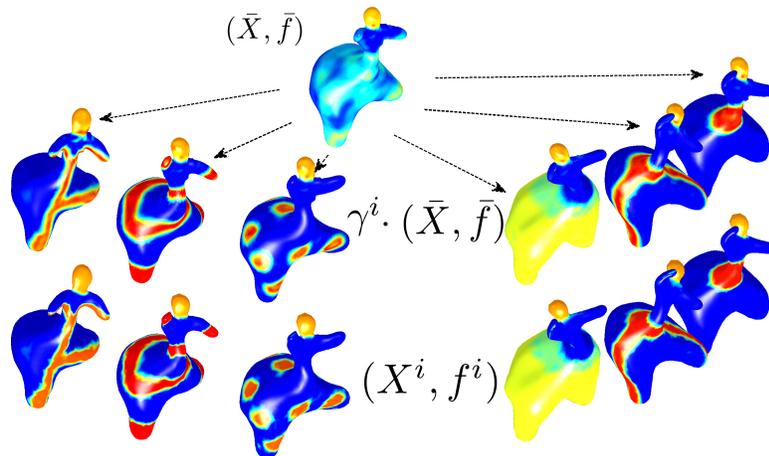


Figure 2: Un exemple de calcul d’atlas avec `fshapesTk` sur le jeu de données synthétiques “vénius”. La surface fonctionnelle moyenne (\bar{X}, \bar{f}) et les déformations γ^i sont calculées à partir des $N = 6$ observations (X^i, f^i) où $i = 1, \dots, 6$

3 Les métamorphoses de surfaces fonctionnelles

Les modèles de déformations non rigides ont été introduits pour modéliser les variations locales entre structures anatomiques d’individus différents. Dans le cadre classique, la déformation est purement géométrique. Ici, on cherche à définir des déformations géométrico-fonctionnelles appelées métamorphoses, voir Figure 3.



Figure 3: Métamorphose d’une forme fonctionnelle : la géométrie et le signal évoluent le long d’un flot.

Pour générer des déformations géométriques, on considère un espace V de champs de vecteurs réguliers de \mathbb{R}^3 (en pratique un espace Hilbert à noyau auto-reproduisant (RKHS) engendré par un noyau radial gaussien de largeur de bande $\sigma_V > 0$ fixé). Soit $v = (v_t)_{t \in [0,1]}$ une famille de champs de vecteurs de V dépendant du temps, on note $\phi_1^v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ le flot de v évalué au temps 1. Nous considérons alors le groupe $\mathcal{G} = \{\phi_1^v | v \in L^2([0,1], V)\}$ de difféomorphismes de \mathbb{R}^3 et si X_0 est une surface de \mathbb{R}^3 on pose $\mathcal{X}_0 = \{\phi(X_0) | \phi \in \mathcal{G}\}$ l'orbite de X sous l'action des difféomorphismes de \mathcal{G} . On peut alors définir l'espace fibré

$$\mathcal{F} = \{(X, f) | X \in \mathcal{X}_0 \text{ et } f \in L^2(X)\}$$

où $L^2(X)$ est l'ensemble des fonctions $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ de carrée intégrable. Un élément de \mathcal{F} est donc un couple formé d'une surface X qui est la déformée de X_0 et sur laquelle est définie un signal $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, voir la Figure 4.

On procède de même pour générer des déformations du signal, si on considère une famille $h : t \mapsto h_t$ de fonctions dans $L^2(X_0)$ alors $t \mapsto \zeta_t = \int_0^t h_s ds$ est la courbe dans $L^2(X_0)$ de vitesse instantanée h_t . On définit alors pour tout $t \in [0,1]$ la déformation $\gamma_t = (\phi_t^v, \zeta_t^h)$ par :

$$\gamma_t \cdot (X_0, f_0) = (\phi_t^v(X_0), (f + \zeta_t^h) \circ (\phi_t^v)^{-1})$$

On note enfin $\gamma = (\phi_1^v, \zeta_1^h)$ la valeur des flots au temps 1. La déformation géométrico-fonctionnelle γ définit une métamorphose de (X, f) et le fibré \mathcal{F} est alors l'orbite de (X_0, f_0) pour les métamorphoses.

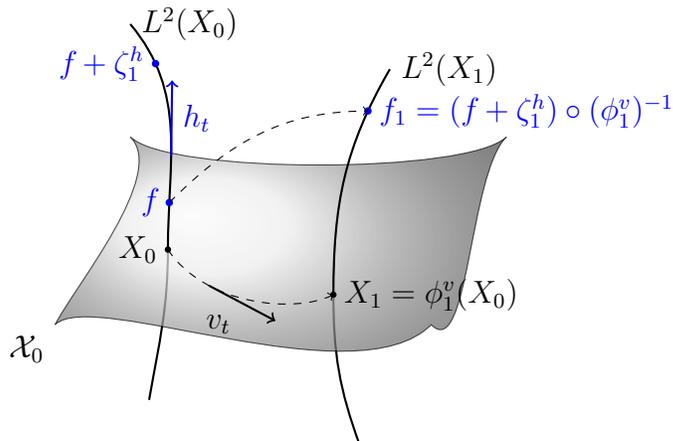


Figure 4: Représentation du fibré \mathcal{F} et de l'action d'une métamorphose.

Un certain nombre de résultats intéressants d'un point de vue statistique sont démontrés dans Charlier, Charon & Trouvé (2014) : soient (X^1, f^1) et (X^2, f^2) dans \mathcal{F} alors la fonctionnelle donnant l'énergie minimale pour passer d'une forme à l'autre :

$$d_{\mathcal{F}}((X^1, f^1), (X^2, f^2)) = \inf_{(v,h) \in L^2([0,1], V \times L^2(X_0))} \left(\int_0^1 |v_t|_V^2 + \int_X |h_t(x)|^2 |d_x \phi_t^v|_{T_x X} |dt \right)^{1/2}$$

est une distance dans \mathcal{F} (Théorème 1) et il existe une géodésique reliant (X^1, f^1) à (X^2, f^2) dans \mathcal{F} (Théorème 2). Enfin, étant donnée $(X^i, f^i) \in \mathcal{F}$ où $i = 1, \dots, N$ la moyenne de Karcher des (X^i, f^i) est bien définie (Théorème 3).

4 Terme d'attache aux données varifolds

Les résultats théoriques présentés à la fin de la Section 2 sont encourageants, mais sont assez peu utiles en pratique. On est dans un cadre où les surfaces fonctionnelles appartiennent toutes à la même orbite \mathcal{F} ce qui n'est pas le cas dans un jeu de données réelles. Il est donc nécessaire de définir une mesure de dissimilarité (aussi appelée *terme d'attache aux données*) entre surfaces fonctionnelles quelconques. Rappelons que les observations ne sont supposées avoir le même nombre de points et qu'une mesure de dissimilarité entre deux surfaces fonctionnelles ne doit donc pas dépendre d'un appariement "point à point" entre ces deux objets.

Dans Charon & Trounev (2013) et Charlier, Charon & Trounev (2014) il est défini une mesure de dissimilarité en termes de *varifolds fonctionnels* inspirés de la théorie géométrique de la mesure. En pratique, on considère un RKHS W' avec un produit de noyaux gaussiens (un noyau pour la géométrie et un pour le signal). Pour chaque surface fonctionnelle (X, f) , on sait calculer explicitement un représentant varifold fonctionnel noté $\mu_{(X,f)} \in W'$. On définit le terme d'attache aux données g entre deux surfaces fonctionnelles (X^1, f^1) et (X^2, f^2) par

$$g((X^1, f^1), (X^2, f^2)) = \|\mu_{(X^1, f^1)} - \mu_{(X^2, f^2)}\|_{W'}^2.$$

où $\|\cdot\|_{W'}$ est la norme de l'espace de Hilbert W' . La distance entre (X^1, f^1) et (X^2, f^2) dépend de manière non linéaire de la proximité des géométries X^1 et X^2 et des valeurs des signaux f^1 et f^2 . L'utilisateur doit fournir deux largeurs de bande pour calibrer la norme varifold : $\sigma_X > 0$ pour la géométrie et $\sigma_f > 0$ pour le signal. Le calcul pratique de la norme varifold est détaillé dans Charlier, Charon & Trounev (2014) Section 6 et est implémenté dans `fshapesTk`.

5 Calcul d'atlas

On se place dans le cadre continu et on suppose que l'on dispose de plusieurs surfaces fonctionnelles (X^i, f^i) avec $i = 1, \dots, N$. On définit une forme fonctionnelle moyenne (\bar{X}, \bar{f}) ainsi que les métamorphoses $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ envoyant (\bar{X}, \bar{f}) vers les (X^i, f^i) comme la solution d'un problème variationnel. Étant donnée une surface fonctionnelle (X_0, f_0)

(appelée *hypertemplate*) on cherche à minimiser la fonctionnelle :

$$J((X, f), \gamma^1, \dots, \gamma^N) = d_{\mathcal{F}_0}^2((X_0, f_0), (X, f)) + \sum_{i=1}^N d_{\mathcal{F}_0}^2((X, f), (X^i, f^i)) + g(\gamma^i(X, f), (X^i, f^i))$$

où $(X, f) = \gamma_0 \cdot (X_0, f_0)$. En d'autres termes, on cherche une forme fonctionnelle moyenne (\bar{X}, \bar{f}) dans l'orbite \mathcal{F} d'une l'hyper-template (X_0, f_0) . Dans ce cas, nous avons pu montrer qu'il existe bien un minimum à la fonctionnelle J sous des hypothèses assez générales (Théorème 6 de Charlier, Charon & Trouvé (2014)).

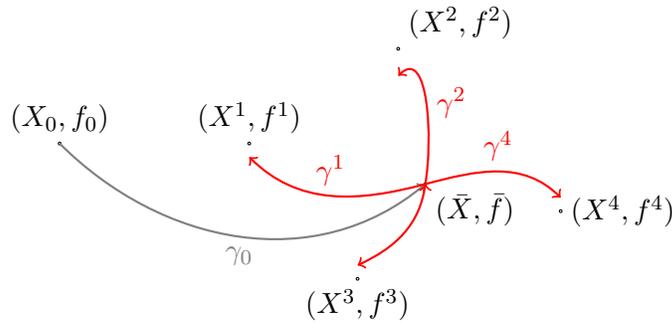


Figure 5: Calcul d'une moyenne à l'aide d'une hypertemplate : la forme moyenne (\bar{X}, \bar{f}) est une version déformée de (X_0, f_0) .

Dans `fshapesTk` est implémentée une version discrète et légèrement simplifiée du problème variationnel précédent : c'est ce que l'on a appelé le modèle tangentiel dans Charlier, Charon & Trouvé (2014). Pour calculer un atlas, l'utilisateur doit fournir une forme fonctionnelle initiale (X_0, f_0) qui est une surface lisse et si possible difféomorphe aux données (on peut toujours prendre une des données mais cela risque d'introduire des biais). Enfin, les déformations sont calculées à l'aide d'une descente de gradient (méthode dite de "tire géodésique").

Bibliographie

- [1] Charon N. et Trouvé A. (2013), *The Varifold Representation of Nonoriented Shapes for Diffeomorphic Registration*. SIAM J. Imaging Sciences 6(4): 2547-2580
- [2] Charlier B., Charon N. et Trouvé A. (2014), *The fshape framework for the variability analysis of functional shapes*, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00981805>.
- [3] Allasonnière S., Bigot J., Glaunès J., Maire F. et Richard F. (2013), *Statistical models for deformable templates in image and shape analysis*, Annales Mathématiques Blaise Pascal, 20(1), 1-35