Inférence statistique des modèles autorégressifs à coefficients aléatoires périodiques

Nassim TOUCHE [1], Abdelhakim AKNOUCHE [2] & Nacer DEMOUCHE [3]

[1] *Faculté des Sciences Exactes, Université de Bejaia, Algérie, touche.nassim@gmail.com.*

[2] *Faculté de Mathématiques, Université des sciences et de Technologie Houari Boumediene, Alger, Algérie, aknouche_ab@yahoo.com.*
[3] *Faculté des Sciences, Université de Bouira, Algérie, nacer.demouche@yahoo.fr..*

Résumé. Dans ce travail, nous nous intéressons à l'inférence statistique du modèle autorégressif à coefficients aléatoires périodiquement distribués ($PRCA$) dans lequel l'innovation et le coefficient aléatoire ne sont pas astreints à être non-corrélés. Nous établissons consistance et normalité asymptotique pour l'estimateur des moindres carrés pondérés en quatre étapes ($4SWLSE$) ainsi que pour l'estimateur du quasi-maximum de vraisemblance Gaussien ($QMLE$) et ce indépendamment de l'hypothèse de stationnarité périodique stricte. Des applications aux tests de stationnarité périodique ainsi qu'à des données rélles sont proposées.
Mots-clés. RCA périodique, RCA généralisé, estimateur des moindres carrés pondérés, estimateur du quasi-maximum de vraisemblance, stationnarité périodique stricte, tests de stationnarité périodique.

Abstract. This work concerns statistical inference for a periodically distributed random coefficient autoregression ($PRCA$) in which the random coefficient and innovation terms are permitted to be correlated. We establish consistency and asymptotic normality of the four-stage weighted least squares estimate ($4SWLSE$) as well as for the quasi-maximum likelihood estimate of $PRCA(1)$ in both periodically stationary and periodically nonstationary environments. Applications to strict stationarity testing as well as to some real data are given.
Keywords. Periodic RCA, generalized RCA, weighted least squares, quasi-maximum likelihood estimate, periodic stationarity, periodic stationarity testing.

1 Introduction

Depuis la fin des années 1970, un intérêt sans cesse croissant a été prêté au modèle autorégressif à coefficients aléatoires (RCA) en raison de son apptitude à représenter une multitude de traits de séries chronologiques (e.g. Aue et Horvath, 2011). Pourtant, ce modèle ne permet pas de représenter adéquatement des séries chronologiques dont la structure change avec le temps, en particulier celles qui sont caractérisées par une structure dynamique périodique. Franses et Paap (2011) ont proposé un modèle RCA à coefficients périodiquement distribués (noté $PRCA$) afin de décrire des séries chronologiques affectées de saisonnalité. Ce modèle, dans lequel le coefficient aléatoire et l'innovation sont supposés non-corrélés, represente une généralisation du modèle RCA standard au cas où les coefficients déterministes et les variances des quantités aléatoires sont périodiques dans le temps.

Nous proposons dans ce travail d'étudier l'inférence statistique d'une variante généralisée du modèle $PRCA$ dans laquelle l'innovation et le coefficient aléatoire ne sont pas astreints à être non-corrélés. En outre, nous en proposons un estimateur des moindres carrés pondérés en quatre étapes ($4SWLSE$) dont nous étudions consistance et normailité asymptotique (CAN). Nous établissons également la propriété CAN pour l'estimateur du quasi-maximum de vraisemblance.

2 Présentation et structure du modèle PRCA

Considérons un processus autorégressif périodique à coefficients aléatoires ($PRCA$), $\{y_t,\ t \in \mathbb{N}\}$ défini par l'équation suivante :

$$y_t = \sum_{j=1}^{p} (\phi_{tj} + \eta_{tj}) y_{t-j} + \varepsilon_t, \qquad t \in \mathbb{N}^*, \tag{2.1}$$

où $y_0, ..., y_{1-p}$ sont des constantes, $\phi_{tj} \in \mathbb{R}$ et $\eta_{tj} = \beta_{tj}\varepsilon_t + \xi_{tj}$, $(1 \leq j \leq p)$ $\xi_t = \left(\xi_{t1}, ..., \xi_{tp}\right)'$. On suppose que:

A1 $\{(\varepsilon_t, \xi_t), t \in \mathbb{N}\}$ *est un processus indépendant et périodiquement distribué* (ipd) *avec* $E(\xi_t) = E(\varepsilon_t) = 0$, $E(\xi_t \xi_t') = \Delta_t > 0$ *et* $E(\varepsilon_1^2) = \sigma_t^2 > 0$. *Les paramètres* $\phi_{tj}, \Delta_t, \beta_{tj}$ *et* σ_t^2 *sont périodiques de période* S*, i.e.* $\phi_{tj} = \phi_{t+S,j}$, $\Delta_t = \Delta_{t+S}$, $\beta_{tj} = \beta_{t+S,j}$, $\sigma_t^2 = \sigma_{t+S}^2$.

Pour simplifier l'exposé, considérons le cas particulier $p = 1$ et $\beta_{t1} = 0$ pour lequel Δ_t est remplacée par ρ_t^2. Pour $u_t = \xi_t y_{t-1} + \varepsilon_t$, le modèle (2.1) peut s'écrire comme une autorégression périodique

$$y_t = \phi \mathcal{Y}_{t-1}' + u_t, \qquad t \in \mathbb{N}^*, \tag{2.2}$$

dans laquelle la séquence $\{u_t, t \in \mathbb{N}\}$ est une différence de martingales par rapport à $\{\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{N}\}$, $\mathcal{F}_t$ étant la σ-algèbre générée par $\{y_0, (\varepsilon_s, \xi_s,), s \leq t\}$ avec $E\left(u_t / \mathcal{F}_{t-1}\right) = 0 = E\left(y_t / \mathcal{F}_{t-1}\right) - \phi \mathcal{Y}_{t-1}'$ et $Var\left(u_t / \mathcal{F}_{t-1}\right) = \rho_t^2 y_{t-1}^2 + \sigma_t^2 = Var\left(y_t / \mathcal{F}_{t-1}\right) = h_t\left(\theta'\right)$.
L'équation (2.2) peut aussi se mettre sous la forme périodique suivante

$$y_{v+nS} = \phi \mathcal{Y}_{nS+v-1}' + u_{nS+v}, \quad 1 \leq v \leq S, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.3}$$

avec

$$\mathcal{Y}_{nS+v-1} = \left(\mathbf{0}_{v-1}', y_{nS+v-1}, \mathbf{0}_{S-v}'\right)'.$$

Pour $e_t = u_t^2 - E\left(u_t^2/\mathcal{F}_{t-1}\right)$, le processus des carrés, $\{u_t^2, t \in \mathbb{N}^*\}$ vérifie lui-même la régression suivante

$$u_{v+nS}^2 = \mathcal{Z}_{v+nS-1}\theta' + e_{v+nS}, \quad 1 \leq v \leq S, \quad n \in \mathbb{N},$$

où $\mathcal{Z}_{v+nS-1} = \left(\mathbf{0}'_{v-1}, y_{v+nS-1}^2, \mathbf{0}'_{S-v}, \mathbf{0}'_{v-1}, 1, \mathbf{0}'_{S-v}\right)'$.
Le vecteur des paramètres est donné par $\lambda = (\phi', \rho^{2\prime}, \sigma^{2\prime})' = (\phi', \theta')'$ où $\phi = (\phi_1, ..., \phi_S)'$, $\rho^2 = (\rho_1^2, ..., \rho_S^2)'$, $\sigma^2 = (\sigma_1^2, ..., \sigma_S^2)'$ et $\theta = (\rho^{2\prime}, \sigma^{2\prime})'$. Soit γ^S l'exposant de Lyapunov associé au modèle (2.3) (voir, Aknouche et Guerbyenne, 2009 pour l'expression de γ^S). Une condition suffisante pour que le modèle soit strictement périodiquement stationnaire est que $\gamma^S < 0$. Nous montrons dans le cas contraire, i.e. $\gamma^S \geq 0$, que y_t diverge vers l'infini. La divergence est en probabilité quand $\gamma^S = 0$ et est exponentiellement presque sûrement ($\delta^t y_t \underset{t\to\infty}{\overset{p.s.}{\to}} \infty$ pour un certain δ, $0 < \delta < 1$) quand $\gamma^S > 0$.

3 Principaux résultats

Pour une série $\{y_1, y_2, ..., y_T,\ T = NS\}$ générée à partir du modèle (2.1), avec T supposé multiple de la période S, nous proposons pour $\lambda = (\phi', \theta')'$ un estimateur des moindres carrés pondérés en quatre étapes $\widehat{\lambda}_{1WLS} = \left(\widehat{\phi}'_{1WLS}, \widehat{\theta}'_{1WLS}\right)'$, $\widehat{\lambda}_{2WLS} = \left(\widehat{\phi}'_{2WLS}, \widehat{\theta}'_{2WLS}\right)'$ décrit comme suit :

Algorithme 3.1

$$\begin{aligned}
\widehat{\phi}_{1WLS} &= \left(\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{v=1}^{S}\frac{1}{h_{v+nS}(\widetilde{\theta})}\mathcal{Y}_{v+nS-1}\mathcal{Y}'_{v+nS-1}\right)^{-1}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{v=1}^{S}\frac{1}{h_{v+nS}(\widetilde{\theta})}\mathcal{Y}_{v+nS-1}y_{v+nS}\\
\widehat{\theta}_{1WLS} &= \left(\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{v=1}^{S}\frac{1}{h_{v+nS}^2(\widetilde{\theta})}\mathcal{Z}_{v+nS-1}\mathcal{Z}'_{v+nS-1}\right)^{-1}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{v=1}^{S}\mathcal{Z}_{v+nS-1}\frac{\widehat{u}_{1,v+nS}^2}{h_{v+nS}^2(\widetilde{\theta})}\\
\widehat{\phi}_{2WLS} &= \left(\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{v=1}^{S}\frac{1}{h_{v+nS}(\widehat{\theta}_{1WLS})}\mathcal{Y}_{v+nS-1}\mathcal{Y}'_{v+nS-1}\right)^{-1}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{v=1}^{S}\frac{1}{h_{v+nS}(\widehat{\theta}_{1WLS})}\mathcal{Y}_{v+nS-1}y_{v+nS}\\
\widehat{\theta}_{2WLS} &= \left(\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{v=1}^{S}\frac{1}{h_{v+nS}^2(\widehat{\theta}_{1WLS})}\mathcal{Z}_{v+nS-1}\mathcal{Z}'_{v+nS-1}\right)^{-1}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{v=1}^{S}\mathcal{Z}_{v+nS-1}\frac{\widehat{u}_{2,v+nS}^2}{h_{v+nS}^2(\widehat{\theta}_{1WLS})},
\end{aligned}$$

où $\widehat{u}_{1,t}$ et $\widehat{u}_{2,t}$ sont des estimations de $\widehat{u}_t$ et $\widetilde{\theta} = \left(\widetilde{\sigma}^{2\prime}, \widetilde{\rho}^{2\prime}\right)'$ est un vecteur de constantes positives arbitrairement connues avec $\widetilde{\sigma}^2 = (\sigma_1^2, ..., \sigma_S^2)'$ et $\widetilde{\rho}^2 = (\rho_1^2, ..., \rho_S^2)'$.

Un estimateur similaire a été étudié par Aknouche (2015) dans le cadre d'un modèle $RCA(1)$ non-périodique. Le résultat suivant établit la consistance et normalité asymptotique des estimateurs $\widehat{\lambda}_{1WLS}$ et $\widehat{\lambda}_{2WLS}$ aussi bien dans la région de stationnarité périodique que dans la région de non-stationnarité périodique et ce indépendamment du vecteur de pondération $\widetilde{\lambda}'$.

Théorème 3.1 *Considérons le modèle* (2.1)**.** *Sous des hypothèses appropriées,*
i) Stationnarité périodique stricte : lorsque $\gamma < 0$*, pour tout* $\widetilde{\lambda}' > 0$,

$$i)\ \widehat{\lambda}_{1WLS} \underset{N\to\infty}{\overset{p.s.}{\to}} \lambda, \qquad ii)\ \widehat{\lambda}_{2WLS} \underset{N\to\infty}{\overset{p.s.}{\to}} \lambda.$$

$$\sqrt{N}\left(\widehat{\lambda}_{1WLS} - \lambda\right) \underset{N\to\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\to}} N(0, A) \quad \sqrt{N}\left(\widehat{\lambda}_{2WLS} - \lambda\right) \underset{N\to\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\to}} N(0, B).$$

ii) Non-stationnarité périodique : lorsque $\gamma > 0$*, pour tout* $\widetilde{\lambda}' > 0$*,* (3.7) *se vérifie encore et*

$$\sqrt{N}\left(\widehat{\psi}'_{1WLS} - \psi'\right) \underset{N\to\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\to}} N(0, \Sigma) \qquad \sqrt{N}\left(\widehat{\psi}'_{2WLS} - \psi'\right) \underset{N\to\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\to}} N(0, \Sigma),$$

A, B et Σ étant des matrices données.

4 Bibliographie

[1] Aknouche, A. (2015). Quadratic random coefficient autoregression with linear in parameters volatility. *Statistical Inference for Stochastic Processes, forthcoming.*
[2] Aknouche, A. and Guerbyenne, H. (2009). Periodic stationarity of random coefficient periodic autoregressions. *Statistics and Probability Letters,* **29**, 990-996.
[3] Aue, A. and Horváth, L. (2011). Quasi-likelihood estimation in stationary and nonstationary autoregressive models with random coefficients. *Statistica Sinica*, **21**, 973-999.
[4] Franses, P.H. and Paap, R. (2011). *Random coefficient periodic autoregression. Statistica Neerlandica*, **65**, 101-115.