Estimation de la VaR conditionnelle d'un portefeuille de rendements GARCH multivariés

Christian Francq [1] & Jean-Michel Zakoïan [2]

[1] *CREST et université de Lille, BP 60149, 59653 Villeneuve d'Ascq cedex, France. E-Mail : christian.francq@ensae.fr*
[2] *CREST et université de Lille, 15 boulevard Gabriel Péri, 92245 Malakoff Cedex, France. E-mail : zakoian@ensae.fr*

Résumé. Nous considérons l'estimation de la valeur à risque (VaR) conditionnelle d'un portefeuille d'actifs. La composition du portefeuille peut varier au cours du temps et le vecteur des rendements est supposé satisfaire un modèle de la forme $\boldsymbol{\epsilon}_t = \boldsymbol{\mu}_t(\boldsymbol{\varphi}_0) + \boldsymbol{\Sigma}_t(\boldsymbol{\vartheta}_0)\boldsymbol{\eta}_t$, où $\boldsymbol{\mu}_t(\boldsymbol{\varphi}_0)$ et $\boldsymbol{\Sigma}_t(\boldsymbol{\vartheta}_0)$ sont respectivement la moyenne et la variance conditionnelle de $\boldsymbol{\epsilon}_t$. Sous l'hypothèse que la loi de l'innovation $\boldsymbol{\eta}_t$ est sphérique, la VaR conditionnelle est caractérisée par un paramètre. Nous donnons un estimateur de ce paramètre de VaR et nous étudions sa distribution asymptotique. Une autre approche multivariée, qui n'est pas fondée sur l'hypothèse de sphéricité, est développée et ses propriétés asymptotiques sont établies. Des expériences de Monte Carlo et une étude empirique illustrent la supériorité de ces deux approches multivariées sur l'approche univariée fondée sur la série du rendement du portefeuille agrégé.

Mots-clés. Risque d'estimation et risque financier, GARCH multivarié, Régression quantile, Valeur à risque.

Abstract. This paper is concerned with the estimation of the conditional Value-at-Risk (VaR) of a portfolio of assets. The composition of the portfolio is time-varying and the vector of returns is assumed to follow a multivariate model of the form $\boldsymbol{\epsilon}_t = \boldsymbol{\mu}_t(\boldsymbol{\varphi}_0) + \boldsymbol{\Sigma}_t(\boldsymbol{\vartheta}_0)\boldsymbol{\eta}_t$, where $\boldsymbol{\mu}_t(\boldsymbol{\varphi}_0)$ and $\boldsymbol{\Sigma}_t(\boldsymbol{\vartheta}_0)$ are general conditional mean and variance of $\boldsymbol{\epsilon}_t$. Under the assumption that the distribution of the innovations, $\boldsymbol{\eta}_t$, is spherical, the asymptotic distribution of an estimator of a VaR parameter, characterizing the conditional VaR, is established. A different multivariate approach, not relying on the sphericity assumption, is developed and its asymptotic properties are established. Monte-Carlo experiments and an empirical study illustrate the superiority of the multivariate approaches over a univariate approach based on the sole series of portfolio returns.

Keywords. Estimation risk and financial risk, Multivariate GARCH, Quantile Regression, Value-at-Risk.

1 Introduction

Soit $\boldsymbol{p}_t = (p_{1t}, \dots, p_{mt})'$ le vecteur des prix de m actifs risqués à la date t. Soit $\boldsymbol{\epsilon}_t = (\epsilon_{1t}, \dots, \epsilon_{mt})'$ le vecteur des log-rendements, tel que $\epsilon_{it} = \log(p_{it}/p_{i,t-1})$ pour $i = 1, \dots, m$.

On note V_t la valeur en t d'un portefeuille composé de $\mu_{i,t-1}$ unités de l'actif i, pour $i = 1, \dots, m$:

$$V_0 = \sum_{i=1}^{m} \mu_i p_{i0}, \quad V_t = \sum_{i=1}^{m} \mu_{i,t-1} p_{it}, \quad \text{pour } t \geq 1$$

où les $\mu_{i,t-1}$ sont des fonctions mesurables des prix jusqu'à la date $t-1$, et les μ_i sont des constantes. On suppose généralement que l'investisseur peut rebalancer son portefeuille sous la contrainte d'autofinancement, de sorte que la valeur en t du portefeuille acheté en $t-1$ égale celle du portefeuille acheté en t.

SF : Le portefeuille vérifie $\sum_{i=1}^{m} \mu_{i,t-1} p_{it} = \sum_{i=1}^{m} \mu_{i,t} p_{it}$.

Sous **SF**, le rendement du portefeuille au cours de la période$[t-1, t]$ satisfait $\frac{V_t}{V_{t-1}} - 1 \approx \epsilon_t^{(P)}$, avec

$$\epsilon_t^{(P)} = \sum_{i=1}^{m} a_{i,t-1} \epsilon_{it} = \mathbf{a}'_{t-1} \boldsymbol{\epsilon}_t, \quad a_{i,t-1} = \frac{\mu_{i,t-1} p_{i,t-1}}{\sum_{j=1}^{m} \mu_{j,t-1} p_{j,t-1}}, \quad i = 1, \dots, m,$$

où $\mathbf{a}_{t-1} = (a_{1,t-1}, \dots, a_{m,t-1})'$ est tel que $\boldsymbol{e}'\mathbf{a}_{t-1} = 1$, en posant $\boldsymbol{e} = (1, \dots, 1)'$.

À la suite de Bâle II, les banques mesurent souvent le risque d'un portefeuille d'actifs en estimant des VaR, c'est-à-dire des quantiles pour le rendement futur. Plus précisément, la VaR *conditionnelle* de $\epsilon_t^{(P)}$ au niveau de risque $\alpha \in (0, 1)$, notée $\mathrm{VaR}_{t-1}^{(\alpha)}(\epsilon^{(P)})$, est définie par

$$P_{t-1}\left[\epsilon_t^{(P)} < -\mathrm{VaR}_{t-1}^{(\alpha)}(\epsilon^{(P)})\right] = \alpha,$$

où P_{t-1} désigne la distribution conditionnellement à $\{\epsilon_u^{(P)}, u < t\}$. La VaR conditionnelle s'oppose à la VaR marginale, qui est fondée uniquement sur la loi marginale des rendements et ne tient pas compte de leur dynamique (voir *e.g.* McNeil, Frey et Embrechts (2005), Kuester, Mittnik et Paolella (2006) et Escanciano et Olmo (2010), qui ont clairement montré la supériorité de la VaR conditionnelle sur la VaR marginale).

L'évaluation d'une telle mesure de risque conditionnelle nécessite donc : soit i) un modèle dynamique pour le vecteur des facteurs de risque $(\boldsymbol{\epsilon}_t)$, ou ii) un modèle dynamique pour la série univariée $(\epsilon_t^{(P)})$. L'approche univariée semble plus simple, mais subit inévitablement une perte d'information liée à l'agrégation des risques. Plus fondamentalement, l'approche ii) ne sera pas valide dans la situation usuelle où le vecteur de poids $\mathbf{a}_{t-1}$ n'est pas constant, car la série $(\epsilon_t^{(P)})$ peut alors être non stationnaire.

Dans le cadre multivarié i) nous considérons un modèle général du type

$$\boldsymbol{\epsilon}_t = \boldsymbol{\mu}_t(\boldsymbol{\varphi}_0) + \boldsymbol{\Sigma}_t(\boldsymbol{\vartheta}_0)\boldsymbol{\eta}_t, \tag{1.1}$$

où $(\boldsymbol{\eta}_t)$ est une suite de vecteurs aléatoires indépendants et identiquement distribués (iid) à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ de moyenne nulle et de variance identité, la matrice $\boldsymbol{\Sigma}_t(\boldsymbol{\vartheta}_0)$ est non singulière. Cette matrice et le vecteur $\boldsymbol{\mu}_t(\boldsymbol{\varphi}_0)$ sont des fonctions des valeurs passées de $\boldsymbol{\epsilon}_t$, paramétrées par $\boldsymbol{\theta}_0 = (\boldsymbol{\varphi}'_0, \boldsymbol{\vartheta}'_0) \in \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$, $d = d_1 + d_2$,

$$\boldsymbol{\mu}_t(\boldsymbol{\varphi}_0) = \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\epsilon}_{t-1}, \boldsymbol{\epsilon}_{t-2}, \dots; \boldsymbol{\varphi}_0), \qquad \boldsymbol{\Sigma}_t(\boldsymbol{\vartheta}_0) = \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\epsilon}_{t-1}, \boldsymbol{\epsilon}_{t-2}, \dots; \boldsymbol{\vartheta}_0). \tag{1.2}$$

On supposera que

A0 : $(\boldsymbol{\epsilon}_t)$ est une solution strictement stationnaire et causale de (1.1)-(1.2).

La VaR est alors donnée par

$$\mathrm{VaR}_{t-1}^{(\alpha)}(\epsilon^{(P)}) = -\mathbf{a}_{t-1}'\boldsymbol{\mu}_t(\boldsymbol{\varphi}_0) + \mathrm{VaR}_{t-1}^{(\alpha)}\left(\mathbf{a}_{t-1}'\boldsymbol{\Sigma}_t(\boldsymbol{\vartheta}_0)\boldsymbol{\eta}_t\right). \tag{1.3}$$

Nous allons maintenant décrire et étudier le comportement asymptotique de deux estimateurs de $\mathrm{VaR}_{t-1}^{(\alpha)}(\epsilon^{(P)})$. La première approche requiert l'hypothèse que la loi de l'innovation $\boldsymbol{\eta}_t$ est sphérique. La seconde approche est un peu plus complexe mais relâche l'hypothèse de sphéricité.

2 Principaux résultats

2.1 Paramètre de VaR conditionnelle

Commençons par considérer le cas où la loi de l'erreur $\boldsymbol{\eta}_t$ est sphérique :

A1 : pour tout vecteur $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ non aléatoire, $\boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{\eta}_t \stackrel{d}{=} \|\boldsymbol{\lambda}\|\eta_{1t}$,

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^m$, η_{it} désigne la composante i de $\boldsymbol{\eta}_t$, et $\stackrel{d}{=}$ signifie l'égalité en distribution. En notant $\Theta = \Theta_\varphi \times \Theta_\vartheta$ l'espace des paramètres, on suppose également que $\boldsymbol{\theta}_0 \in \Theta$ et que

A2 : il existe une fonction continument différentiable G telle que pour tout $\boldsymbol{\vartheta} \in \Theta_\vartheta$, tout $K > 0$, et toute suite $(\mathbf{x}_i)_i$ de $\mathbb{R}^m$

$$K\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots; \boldsymbol{\vartheta}) = \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots; \boldsymbol{\vartheta}^*), \quad \text{où } \boldsymbol{\vartheta}^* = G(\boldsymbol{\vartheta}, K).$$

Tout modèle raisonnable de type GARCH est stable par changement d'échelle, et vérifie donc **A2**. Sous ces hypothèses, pour $\alpha < 1/2$, nous avons

$$\mathrm{VaR}_{t-1}^{(\alpha)}(\epsilon^{(P)}) = -\mathbf{a}_{t-1}'\boldsymbol{\mu}_t(\boldsymbol{\varphi}_0) + \|\mathbf{a}_{t-1}'\boldsymbol{\Sigma}_t(\boldsymbol{\vartheta}_0^*)\|$$

où

$$\boldsymbol{\vartheta}_0^* = G\left(\boldsymbol{\vartheta}_0, \xi_{1-2\alpha}\right),$$

et $\xi_{1-2\alpha}$ désigne le quantile d'ordre $(1-2\alpha)$ de $|\eta_{1t}|$, c'est-à-dire, sous **A1**, l'opposé du quantile d'ordre α d'une composante de $\boldsymbol{\eta}_t$.

Le paramètre $\boldsymbol{\theta}_0^* = (\boldsymbol{\varphi}_0', \boldsymbol{\vartheta}_0^{*'})'$, qui tient compte à la fois d'un quantile de la loi des erreurs et du paramètre $\boldsymbol{\theta}_0$ de la dynamique, peut être appelé *paramètre de VaR* de niveau α. Ceci étend le concept introduit dans le cadre de modèles GARCH univariés par Francq et Zakoïan (2015). Le paramètre de VaR s'estime naturellement en deux étapes.

Dans une première étape, on introduit un estimateur $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n = (\widehat{\boldsymbol{\varphi}}_n', \widehat{\boldsymbol{\vartheta}}_n')'$ de $\boldsymbol{\theta}_0$, obtenu à partir des observations $\boldsymbol{\epsilon}_1, \ldots, \boldsymbol{\epsilon}_n$ et des valeurs initiales $\widetilde{\boldsymbol{\epsilon}}_0, \widetilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{-1}, \ldots$. Pour $t \geq 1$ et $(\boldsymbol{\varphi}', \boldsymbol{\vartheta}')' \in \Theta$, on pose

$$\widetilde{\boldsymbol{\mu}}_t(\boldsymbol{\varphi}) = \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\epsilon}_{t-1}, \ldots, \boldsymbol{\epsilon}_1, \widetilde{\boldsymbol{\epsilon}}_0, \widetilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{-1}, \ldots; \boldsymbol{\varphi}), \quad \widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}_t(\boldsymbol{\vartheta}) = \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\epsilon}_{t-1}, \ldots, \boldsymbol{\epsilon}_1, \widetilde{\boldsymbol{\epsilon}}_0, \widetilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{-1}, \ldots; \boldsymbol{\vartheta}).$$

Dans une seconde étape on calcule les résidus $\widehat{\boldsymbol{\eta}}_t = \widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}_t^{-1}(\widehat{\boldsymbol{\vartheta}}_n)\{\boldsymbol{\epsilon}_t - \widetilde{\boldsymbol{\mu}}_t(\widehat{\boldsymbol{\varphi}}_n)\}) = (\widehat{\eta}_{1t}, \dots, \widehat{\eta}_{mt})'$ puis le quantile empirique $\xi_{n,1-2\alpha}$ d'ordre $(1-2\alpha)$ de $\{|\widehat{\eta}_{it}|, 1 \le i \le m, 1 \le t \le n\}$.

Un estimateur de la VaR conditionnelle de niveau α est alors donné par

$$\widehat{\mathrm{VaR}}_{t-1}^{(\alpha)}(\epsilon^{(P)}) = -\mathbf{a}'_{t-1}\widetilde{\boldsymbol{\mu}}_t(\widehat{\boldsymbol{\varphi}}_n) + \|\mathbf{a}'_{t-1}\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}_t(\widehat{\boldsymbol{\vartheta}}_n)\|\xi_{n,1-2\alpha}.$$

2.2 Loi asymptotique de l'estimateur du paramètre de VaR

On suppose que l'estimateur de $\boldsymbol{\theta}_0$ satisfait les conditions de régularité suivantes.

A3 : Quand $n \to \infty$, presque sûrement (p.s.) $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n \to \boldsymbol{\theta}_0$, et on a

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0\right) \overset{o_P(1)}{=} \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{n} \boldsymbol{\Delta}_{t-1}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{\eta}_t),$$

où $\boldsymbol{V}(\cdot)$ est une fonction mesurable, $\boldsymbol{V} : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^k$ pour un entier positif k, et $\boldsymbol{\Delta}_{t-1}$ est une matrice $d \times k$, mesurable par rapport à la tribu engendrée par $\{\boldsymbol{\eta}_u,\ u < t\}$. Les variables $\boldsymbol{\Delta}_t$ et $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{\eta}_t)$ appartiennent à L^2 avec $E\boldsymbol{V}(\boldsymbol{\eta}_t) = 0, \quad \mathrm{var}\{\boldsymbol{V}(\boldsymbol{\eta}_t)\} = \boldsymbol{\Upsilon}$ non singulière et $E\boldsymbol{\Delta}_t = \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{\varphi}} \\ \boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{\vartheta}} \end{pmatrix}$ de plein rang ligne.

Soit $\boldsymbol{\Psi} := \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Upsilon}\boldsymbol{\Lambda}' = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\varphi}} & \boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\vartheta}} \\ \boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{\vartheta}\boldsymbol{\varphi}} & \boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{\vartheta}\boldsymbol{\vartheta}} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\Psi}_{\cdot\boldsymbol{\varphi}} \quad \boldsymbol{\Psi}_{\cdot\boldsymbol{\vartheta}})$. La loi de $\widehat{\mathrm{VaR}}_{t-1}^{(\alpha)}(\mathbf{a}'_{t-1}\boldsymbol{\epsilon}_t)$ sera obtenue à partir de la loi asymptotique jointe de $(\widehat{\boldsymbol{\theta}}'_n, \xi_{n,1-2\alpha})$. Nous avons pour cela besoin d'hypothèses d'identifiabilité et de dérivabilité.

A4 : Pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^K, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$,

$$\boldsymbol{x}'\boldsymbol{V}(\boldsymbol{\eta}_t) + \boldsymbol{y}'\boldsymbol{\nu}_\alpha(\boldsymbol{\eta}_t) = 0, \ \ p.s. \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{x} = 0_K, \ \ \boldsymbol{y} = 0_m,$$

où $\boldsymbol{\nu}_\alpha(\boldsymbol{\eta}_t) = (\mathbf{1}_{\{|\eta_{1t}|<\xi_{1-2\alpha}\}} - 1 + 2\alpha, \dots, \mathbf{1}_{\{|\eta_{mt}|<\xi_{1-2\alpha}\}} - 1 + 2\alpha)'$.

A5 : Les fonctions $\boldsymbol{\varphi} \mapsto \boldsymbol{\mu}(x_1, x_2, \dots; \boldsymbol{\varphi})$ et $\boldsymbol{\vartheta} \mapsto \boldsymbol{\Sigma}(x_1, x_2, \dots; \boldsymbol{\vartheta})$ sont continument différentiables sur Θ_φ et Θ_ϑ respectivement.

Théorème 2.1 *Supposons les hypothèses* **A0-A5** *satisfaites. Soit* $\alpha \in (0, 0.5)$. *On suppose que les variables* $|\eta_{kt}|$ *admettent une densité* f *continue et strictement positive dans un voisinage de* $\xi_{1-2\alpha}$. *Alors*

$$\sqrt{n}\begin{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0 \\ \xi_{n,1-2\alpha} - \xi_{1-2\alpha} \end{pmatrix} \overset{\mathcal{L}}{\to} \mathcal{N}\left(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Xi} := \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Psi} & \boldsymbol{\Xi}_{\boldsymbol{\theta}\xi} \\ \boldsymbol{\Xi}'_{\boldsymbol{\theta}\xi} & \zeta_{1-2\alpha} \end{pmatrix}\right),$$

où $\boldsymbol{\Omega} = E\left[\left\{vec\left(\boldsymbol{\Sigma}_t^{-1}\right)\right\}'\left\{\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\vartheta}'}vec\left(\boldsymbol{\Sigma}_t\right)\right\}\right]$, $\boldsymbol{W}_\alpha = Cov(\boldsymbol{V}(\boldsymbol{\eta}_t), N_t)$, $\gamma_\alpha = var(N_t)$, *avec* $N_t = \sum_{j=1}^m \mathbf{1}_{\{|\eta_{jt}|<\xi_{1-2\alpha}\}} - 1 + 2\alpha$, *et*

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Xi}_{\boldsymbol{\theta}\xi} &= \frac{-1}{m}\left\{\xi_{1-2\alpha}\boldsymbol{\Psi}_{\cdot\boldsymbol{\vartheta}}\boldsymbol{\Omega}' + \frac{1}{f(\xi_{1-2\alpha})}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{W}_\alpha\right\}, \\
\zeta_{1-2\alpha} &= \frac{1}{m^2}\left\{\xi_{1-2\alpha}^2\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{\vartheta}\boldsymbol{\vartheta}}\boldsymbol{\Omega}' + \frac{2\xi_{1-2\alpha}}{f(\xi_{1-2\alpha})}\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{\vartheta}}\boldsymbol{W}_\alpha + \frac{\gamma_\alpha}{f^2(\xi_{1-2\alpha})}\right\}.
\end{aligned}$$

De plus, $\boldsymbol{\Xi}$ est inversible.

2.3 Estimation de la VaR sans l'hypothèse de sphéricité

D'après (1.3), la VaR conditionnelle est

$$\mathrm{VaR}_{t-1}^{(\alpha)}(\epsilon^{(P)}) = \mathrm{VaR}_{t-1}^{(\alpha)}\left\{\mathbf{a}_{t-1}'\boldsymbol{\mu}_t(\boldsymbol{\varphi}_0) + \mathbf{a}_{t-1}'\boldsymbol{\Sigma}_t(\boldsymbol{\vartheta}_0)\boldsymbol{\eta}_t\right\} = -\mathbf{a}_{t-1}'\boldsymbol{\mu}_t(\boldsymbol{\varphi}_0) - q_\alpha(t;\boldsymbol{\vartheta}_0)$$

où $q_\alpha(t;\boldsymbol{\vartheta})$ est le quantile théorique d'ordre α de $\boldsymbol{c}_t'(\boldsymbol{\vartheta})\boldsymbol{\eta}_1$, avec le vecteur (que l'on considère comme non aléatoire)

$$\boldsymbol{c}_t'(\boldsymbol{\vartheta}) = \mathbf{a}_{t-1}'\boldsymbol{\Sigma}_t(\boldsymbol{\vartheta}).$$

Cette quantité peut être estimée par

$$\widehat{\mathrm{VaR}}_{M,t-1}^{(\alpha)}(\epsilon^{(P)}) = \mathbf{a}_{t-1}'\boldsymbol{\mu}_t(\widehat{\boldsymbol{\varphi}}_n) - q_{n,\alpha}(t;\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n),$$

où $q_{n,\alpha}(t;\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n)$ désigne le quantile empirique d'ordre α de

$$\{\boldsymbol{c}_t'(\widehat{\boldsymbol{\vartheta}}_n)\widehat{\boldsymbol{\eta}}_s, \quad t-n \leq s \leq t-1\}$$

et $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n$ est obtenu avec les observations passées $\boldsymbol{\epsilon}_{t-n}, \dots, \boldsymbol{\epsilon}_{t-1}$.

Soit $\boldsymbol{a} : \boldsymbol{\Theta}_{\boldsymbol{\vartheta}} \mapsto \mathbb{R}^m$ et $b : \boldsymbol{\Theta}_{\boldsymbol{\varphi}} \mapsto \mathbb{R}$ des vecteurs de fonctions continument différentiables. Soit $q_\alpha(\boldsymbol{\theta})$ le quantile théorique d'ordre α de $b(\boldsymbol{\varphi}) - \boldsymbol{a}'(\boldsymbol{\vartheta})\boldsymbol{\eta}_t(\boldsymbol{\theta})$, où $\boldsymbol{\eta}_t(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\Sigma}_t^{-1}(\boldsymbol{\vartheta})\{\boldsymbol{\epsilon}_t - \boldsymbol{\mu}_t(\boldsymbol{\varphi})\}$. Soit $q_{n,\alpha}(\boldsymbol{\theta})$ le quantile empirique d'ordre α de $\{b(\boldsymbol{\varphi}) - \boldsymbol{a}'(\boldsymbol{\vartheta})\boldsymbol{\eta}_t(\boldsymbol{\theta}), 1 \leq t \leq n\}$. Nous avons besoin de cette nouvelle condition d'identifiabilité.

A4* : Pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^K, y \in \mathbb{R}$,

$$\boldsymbol{x}'\boldsymbol{V}(\boldsymbol{\eta}_t) + y(\mathbf{1}_{b(\boldsymbol{\varphi}_0)-\boldsymbol{a}'(\boldsymbol{\vartheta}_0)\boldsymbol{\eta}_t<q_\alpha(\boldsymbol{\theta}_0)} - \alpha) = 0, \ \ a.s. \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{x} = 0_K, \ \ y = 0.$$

Le résultat suivant fournit la loi asymptotique de $q_{n,\alpha}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n)$.

Théorème 2.2 *On suppose* **A0, A3, A4***. *Soit $\alpha \in (0, 0.5)$ et $q_\alpha(\boldsymbol{\theta}_0) > 0$. On suppose que la variable $\boldsymbol{a}'(\boldsymbol{\vartheta}_0)\boldsymbol{\eta}_t$ admet une densité $f_{\boldsymbol{a}}$ continue et strictement positive dans un voisinage de $x_0 = b(\boldsymbol{\varphi}_0) - q_\alpha(\boldsymbol{\theta}_0)$. On suppose également que les composantes de $\boldsymbol{\eta}_t$ ont la même distribution. Alors*

$$\sqrt{n}\{q_{n,\alpha}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n) - q_\alpha(\boldsymbol{\theta}_0)\} \ \stackrel{\mathcal{L}}{\to} \ \mathcal{N}\left(0, \sigma^2 := \boldsymbol{\omega}'\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\omega} + 2\boldsymbol{\omega}'\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{A}_\alpha + \frac{\alpha(1-\alpha)}{f_{\boldsymbol{a}}^2(x_0)}\right),$$

où $\boldsymbol{A}_\alpha = Cov(\boldsymbol{V}(\boldsymbol{\eta}_t), \mathbf{1}_{\{b(\boldsymbol{\varphi}_0)-\boldsymbol{a}'(\boldsymbol{\vartheta}_0)\boldsymbol{\eta}_t<q_\alpha(\boldsymbol{\theta}_0)\}})$ et

$$\boldsymbol{\omega}' = \left[\frac{\partial b}{\partial \boldsymbol{\varphi}'}(\boldsymbol{\varphi}_0) + \boldsymbol{a}'(\boldsymbol{\vartheta}_0)E(\boldsymbol{C}_t) \qquad \frac{x_0}{\boldsymbol{a}'(\boldsymbol{\vartheta}_0)\boldsymbol{e}}\boldsymbol{e}'\left\{(\boldsymbol{a}'(\boldsymbol{\vartheta}_0) \otimes \boldsymbol{I}_m)E(\boldsymbol{D}_t) - \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial \boldsymbol{\vartheta}'}(\boldsymbol{\vartheta}_0)\right\}\right],$$

avec

$$\boldsymbol{C}_t = (\boldsymbol{C}_{1t} \dots \boldsymbol{C}_{mt})', \qquad \boldsymbol{C}_{kt} = vec\left\{\boldsymbol{e}_k'\boldsymbol{\Sigma}_t^{-1}\frac{\partial \boldsymbol{\mu}_t}{\partial \boldsymbol{\varphi}'}\right\},$$

en notant $\boldsymbol{e}_k$ *la colonne* k *de la matrice identité* $m \times m$*, et*

$$\boldsymbol{D}_t = (\boldsymbol{D}_{1t}' \dots \boldsymbol{D}_{mt}')', \qquad \boldsymbol{D}_{kt} = (I_m \otimes \boldsymbol{e}_k'\boldsymbol{\Sigma}_t^{-1})\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\vartheta}'}\left\{vec(\boldsymbol{\Sigma}_t)\right\}.$$

De plus $\sigma^2 > 0$.

La comparaison empirique des deux estimateurs $\widehat{\mathrm{VaR}}_{t-1}^{(\alpha)}(\epsilon^{(P)})$ et $\widehat{\mathrm{VaR}}_{M,t-1}^{(\alpha)}(\epsilon^{(P)})$, ainsi que l'estimateur obtenu en ajustant directement un modèle GARCH univarié sur la série $\epsilon^{(P)}$, est globalement à l'avantage de $\widehat{\mathrm{VaR}}_{M,t-1}^{(\alpha)}(\epsilon^{(P)})$ car l'hypothèse de sphéricité est souvent irréaliste (les rendements financiers présentent typiquement des asymétries incompatibles avec cette hypothèse).

Bibliographie

[1] Escanciano, J.C. et Olmo, J. (2010), Backtesting parametric value-at-risk with estimation risk, *Journal of Business & Economic Statistics*, 28, 36–51.
[2] Francq, C. et Zakoïan, J.M. (2015), Risk-parameter estimation in volatility models, *Journal of Econometrics*, 184, 158–173.
[3] Kuester, K., Mittnik, S. and Paolella, M.S. (2006), Value-at-Risk predictions : A comparison of alternative strategies, *Journal of Financial Econometrics*, 4, 53–89.
[4] McNeil, A.J., Frey, R. et Embrechts, P. (2005), *Quantitative Risk Management,* Princeton University Press.