45e Journées de Statistique de la SFdS, Juin 01–05 2015, Lille

Ph.D. student presentation

Analyse de sensibilité et application en finance

Areski Cousin
Alexandre Janon
Ibrahima Niang
Véronique Maume-Deschamps
Université Claude Bernard (Lyon 1), ISFA, Laboratoire Sciences Actuarielle et Financière

Les récents épisodes d'instabilité financière de 2008 ont remis en cause la précision des modèles mathématiques utilisés en finance pour évaluer les risques financiers et actuariels. Bien souvent, cette modélisation basée sur des approches stochastiques est imparfaite, notamment en raison des incertitudes sur les paramètres qui définissent le modèle. Les modèles de la finance mathématique sont généralement le fruit de différentes approximations telles que :

1. simplification dans les hypothèses (modélisation des actifs par des mouvements browniens)
2. approximations numériques : erreurs de discrétisation
3. estimations des paramètres du modèle, qui peuvent être nombreux , et qui en général ne sont pas connus exactement.

Il existe différentes méthodes d'analyse de sensibilité en finance mais la méthode la plus connue est celle dite locale basée sur les dérivées des paramètres du modèle. L'objectif de notre étude est d'utiliser les méthodes d'analyse de sensibilité pour des applications financières. En effet, nous souhaitons à travers ce travail, présenter des outils d'analyse de sensibilité globale basés sur les indices de Sobol pour quantifier, pour un modèle financier donné, l'impact de l'incertitude des paramètres du modèle sur une quantité d'intérêt appelée sortie du modèle. Cette sortie du modèle représente en général, le prix d'un actif financier, la probabilité de défaut ou de ruine d'une compagnie d'assurance, la MCEV (market consistent embedded value), la Value at Risk (VaR), etc. Pour plus de référence sur l'analyse de sensibilité globale, on pourra se référer à Saltelli et al. (2008) ou Janon (2012) .
Dans ce qui suit, on désignera par Y la sortie d'un modèle financier, fonction (à valeurs réelles) f de k variables (réelles) d'entré notées $X_1, \dots, X_k$:

$$Y = f(X_1, \dots, X_k).$$

L'incertitude des paramètres d'entrée du modèle est modélisée en affectant une loi de probabilité (connue) au k-uplet de paramètre $X = (X_1, \dots, X_k)$ qui est un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^k$ avec les X_i indépendantes. L'indice de Sobol de la variable X_i sur Y est défini par la quantité suivante :

$$S_{X_i} = \frac{\mathrm{Var}(\mathbb{E}(Y \mid X))}{\mathrm{Var}(Y)}.$$

Il s'agit d'un indicateur statistique quantifiant l'impact de l'incertitude de la variable X_i sur la sortie Y. Il représente la part de la variabilité de la sortie Y expliquée par la variabilité du paramètre X_i. Concrètement lorsque Y est le prix d'un actif financier, dire que S_{X_i}

est petit revient à dire que les variations du paramètre X_i n'ont pas d'impact sur le calcul du prix de l'actif financier considéré, par conséquent X_i peut être fixé lors de la calibration du modèle. En gestion des risques, le calcul d'indice de sensibilité permet de hiérarchiser les paramètres d'entrée en fonction de leur influence sur la sortie. Les paramètres les plus influents sont ceux sur lesquels l'incertitude doit être réduite dans la mesure du possible en priorité afin d'apporter une réduction de l'incertitude sur la sortie. À l'inverse, les paramètres les moins influents peuvent être fixés à une valeur nominale, ce qui permet de simplifier le modèle (par ex. au travers de la négligence de certains effets) et sa calibration.

Dans le cadre de notre étude, nous souhaitons comparer les indices de Sobol lorsque les paramètres du modèle sont ordonnés au sens de la dominance stochastique sous condition que f appartient à une certaine classe de fonction $\mathcal{A}$ bien définie. De façon plus claire, on s'intéresse à l'impact des différents ordres stochastiques sur les indices de Sobol. Nous nous intéresserons essentiellement aux ordres suivants : stochastique, dispersif et l'ordre excess wealth. Pour fixer les idées, nous allons commencer par faire quelques rappels sur les ordres stochastiques puis nous présenterons les résultats théoriques obtenus et enfin nous présenterons quelques illustrations numériques issues de la finance.

0.1 Ordre stochastique et impact sur la variance

Nous commençons par présenter quelques rappels de notions sur les ordres stochastiques qui nous serviront par la suite. Le lecteur pourra se référer à Shaked and Shanthikumar (2007) ou Denuit et al. (2005). Lorsque X est une variable aléatoire, on désignera respectivement par F_X sa fonction de répartition, F_X^{-1} sa fonction quantile et $\overline{F}_X$ sa fonction de survie.

Definition 0.1.1 *Soit X et Y deux variables aléatoires, on dira que*

1. *X est plus petit que Y au sens de l'ordre stochastique standard noté ($X \leq_{st} Y$) ssi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a*
$$\overline{F}_X(t) \leq \overline{F}_Y(t).$$
2. *X est plus petit que Y au sens de l'ordre dispersif noté ($X \leq_{disp} Y$) ssi la fonction $F_Y^{-1} - F_X^{-1}$ est croissante.*
3. *Si X et Y sont L^1 intégrable, alors X est plus petit que Y au sens de l'ordre excess wealth noté ($X \leq_{ew} Y$) ssi pour tout $p \in]0,1[$,*
$$\int_{[F_X^{-1}(p),\infty[} \overline{F}_X(x)dx \leq \int_{[F_Y^{-1}(p),\infty[} \overline{F}_Y(x)dx.$$

Remarque 0.1.2 *La notion d'odre stochastique quantifie le concept qu'une variable aléatoire soit supérieure à une autre et il permet donc de comparer deux distributions. Par exemple, lorsque X et Y sont des loteries alors dire que $X \leq_{st} Y$ équivaut à dire que la probabilité d'être plus riche qu'un seuil donné t avec la loterie Y est plus élevée qu'avec la loterie X, quel que soit le seuil de richesse t considéré.*

La proposition suivante démontrée dans Shaked and Shanthikumar (2007) permet de montrer que les ordres *ew* et *disp* sont compatible avec la variance.

Proposition 0.1.3 *Soit X et Y deux variables aléatoires d'espérance finie.*

1. *Si $X \leq_{disp} Y$ alors $X \leq_{ew} Y$ et si de plus X et Y admettent des moments d'ordre 2 alors,* $\mathrm{Var}(X) \leq \mathrm{Var}(Y)$.
2. *Si $X \leq_{disp} Y$ et $X \leq_{st} Y$ alors pour toute fonction croissante convexe ou décroissante concave f,on a que, $f(X) \leq_{disp} f(Y)$.*
3. *Si X and Y sont des variables aléatoires continues à support borné par (resp.) ℓ_* et ℓ, $X \leq_{ew} Y$ and $-\infty < \ell_* \leq \ell$, alors pour toute fonction croissante convexe f, telle que $f(X)$ et $f(Y)$ soient d'espérance finie, on a $f(X) \leq_{ew} f(Y)$. [Théorème 4.2 dans Shaked et al. (2010)]*

0.2 Lien entre ordre stochastique et indice de Sobol

L'objectif de cette partie est de montrer comment une augmentation d'incertitude (au sens ordre stochastique) des paramètres d'entrée impacte la sortie du modèle.
Soit $X = (X_1, \dots, X_k)$ le vecteur des paramètres d'entrée, on désigne pour $i \in \{1, \dots k\}$ par X_{-i} le vecteur aléatoire $(X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_k)$ et par $\mathrm{X}^* = (X_1, \dots, X_{i-1}, X_i^*, X_{i+1}, \dots, X_k)$ le vecteur X dont la i-ème composante est remplacée par X_i^*. L'indice de Sobol du paramètre X_i^* est donné par :

$$S^*_{X_i} = \frac{\mathrm{Var}(\mathbb{E}(f(X^*) \mid X_i^*)))}{\mathrm{Var}(f(X^*))}$$

On cherche à répondre à la question suivante : étant donné que X_i^* et X_i sont ordonnés au sens de l'ordre stochastique, peut-on comparer S_{X_i} et $S^*_{X_i}$?

Résultat dans le cas additif
Dans le cas où la sortie du modèle est additive i.e lorsque

$$f(X_1, \dots, X_k) = \sum_{j=1}^{k} g_j(X_j) + K \tag{0.2.1}$$

avec $g_1, \dots, g_k$ des fonctions à valeurs réelles et $K \in \mathbb{R}$ alors on montre le résultat suivant :

Theorem 0.2.1 *Soit X_i^* une variable aléatoire indépendante de X_{-i} et supposons que $X_i^* \leq_{ew} X_i$ et $-\infty < \ell_* \leq \ell$, où ℓ_* et ℓ sont respectivement les bornes-inférieures du support de X_i^* et X_i. Si g_i est une fonction croissante convexe, alors $S_i^* \leq S_i$ et $S_j^* \geq S_j$ pour $j \neq i$.*

Résultat dans le cas non additif
Dans le cas où la sortie du modèle n'est pas additive, on considèrera l'indice de Sobol total de X_i noté S_{T_i} et qui est défini comme suit

$$S_{T_i} = 1 - \frac{\mathrm{Var}(\mathbb{E}(f(X) \mid X_{-i}))}{\mathrm{Var}(Y)}. \tag{0.2.2}$$

Ce dernier est une autre mesure de l'influence du paramètre X_i, en incluant l'effet de ses interactions avec les autres paramètres d'entrée. Lorsque la sortie du modèle est multiplicative i.e lorsque

$$f(X_1, \ldots, X_k) = \prod_{j=1}^{k} g_j(X_j) + K \tag{0.2.3}$$

avec $g_1, \ldots, g_k$ des fonctions à valeurs réelles et $K \in \mathbb{R}$ alors on montre le résultat suivant :

Theorem 0.2.2 *Soit X_i^* une variable aléatoire indépendante de X_{-i} et supposons que $X_i^* \leq_{disp} X_i$ et $X_i^* \leq_{st} X_i$. Si $\log g_i$ est une fonction croissante convexe ou décroissante concave, alors $S^*_{T_i} \leq S_{T_i}$ et $S^*_{T_j} \geq S_{T_j}$ for $j \neq i$.*

Nos résultats se généralisent aussi pour d'autres classes de fonctions mais aussi pour des groupes de variables en utilisant les ordres stochastiques multivariés. L'exemple suivant illustre nos résultats dans le cadre du modèle de Heston.

0.3 Illustration numérique

Dans cet exemple, on présente une application numérique issue de la finance. On considère le modèle à volatilité stochastique de Heston représenté par l'équation différentielle stochastique suivante

$$\begin{aligned} dS_t &= (r-q)S_t dt + \sqrt{\sigma_t} S_t dB_t && (0.3.1) \\ d\sigma_t &= \kappa(\theta - \sigma_t)dt + \sigma\sqrt{\sigma_t} dW_t && (0.3.2) \end{aligned}$$

où B et W sont deux mouvements browniens standards corrélés i.e $d\langle B, W\rangle_t = \rho dt$.
Les paramètres du modèle sont :

- r : le taux sans risque,
- q : le taux de dividende,
- $\kappa > 0$: la vitesse de retour à la moyenne de la volatilité,
- $\theta > 0$: la volatilité à long terme,
- $\sigma > 0$: la volatilité de la volatilité,
- $\sigma_0 > 0$: la volatilité initiale,
- $\rho \in [-1, 1]$: corrélation entre les mouvements browniens B et W.

Pour ce modèle, le prix à l'instant t d'une option Européenne de prix d'exercice K et de maturité T est donné par

$$C(t, K, T) = S_t e^{-q\tau} P_1 - K e^{-r\tau} P_2 \tag{0.3.3}$$

avec pour $j = 1, 2$

$$\begin{aligned}
P_j &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \Re\left(\frac{e^{-i\phi \log K} f_j(\phi; x_t, \sigma_t)}{i\phi}\right) d\phi \\
f_j(\phi; x_t, \sigma_t) &= \exp\left(C_j(\phi;\tau) + D_j(\phi;\tau)\sigma_t + i\phi x_t\right), \\
C_j &= (r-q)i\phi\tau + \frac{\kappa\theta}{\sigma^2}\left[(b_j - \rho\sigma i\phi + d_j)\tau - 2\log\left(\frac{1 - g_j e^{d_j\tau}}{1 - g_j}\right)\right], \\
D_j &= \frac{b_j - \rho\sigma i\phi + d_j}{\sigma^2}\left(\frac{1 - e^{d_j\tau}}{1 - g_j e^{d_j\tau}}\right), \\
g_j &= \frac{b_j - \rho\sigma i\phi + d_j}{b_j - \rho\sigma i\phi - d_j}, \\
d_j &= \sqrt{(\rho\sigma i\phi - b_j)^2 - \sigma^2(2u_j i\phi - \phi^2)}, \\
u_1 &= \frac{1}{2}, u_2 = -\frac{1}{2}, b_1 = \kappa - \rho\sigma, b_2 = \kappa, x_t = \log S_t, \tau = T - t.
\end{aligned}$$

La sortie du modèle est représentée par $C(t, K, T)$. Etant donné que les paramètres d'entrée ne sont pas connus avec certitude, quel est l'impact de l'incertitude de tels paramètres sur le prix de l'option ?
Dans le Tableau 1, on a représenté l'indice de Sobol total des paramètres du modèle selon deux hypothèses sur la distribution des paramètres d'entrée. Dans le premier scénario (colonne 3), tous les paramètres sont supposés suivre une loi uniforme. Dans le second scénario (dernière colonne), on change uniquement la distribution du taux d'intérêt r^* en r et tel que $r^* \leq_{\text{disp}} r$ et $r^* \leq_{\text{st}} r$. Les autres paramètres sont fixés comme suit : $T = 0.5$, $S_0 = 100$, $K = 100$.

paramètre	loi	indice de Sobol	paramètre	loi	indice de Sobol
r^*	$[0, 1]$	0.32	r	$[0, 2]$	0.73
q	$[0, 1]$	0.39	q	$[0, 1]$	0.20
κ	$[0, 1]$	0.0036	κ	$[0, 1]$	0.0009
θ	$[0, 1]$	0.0082	θ	$[0, 1]$	0.0020
σ	$[0, 1]$	0.0012	σ	$[0, 1]$	0.0004
σ_0	$[0, 1]$	0.30	σ_0	$[0, 1]$	0.08
ρ	$[0, 1]$	0.0011	ρ	$[0, 1]$	0.0004

Table 1 – Indice de Sobol totaux des paramètres du modèle de Heston. Tous les chiffres sont significatifs avec une probabilité de 95%.

Comme on peut l'observer sur le Tableau 1, l'influence des paramètres d'entrée κ, θ, σ and ρ sont négligeable dans les deux scénarios considérés. On peut noter que la variabilité du prix de l'option est due principalement au taux de dividende q et au taux sans risque r. Des conclusions semblables sont mentionnées dans Saltelli et al. (2008) mais la différence avec notre approche est qu'on analyse comment le changement de loi des paramètres d'entrée affecte les indices totaux de Sobol. Il est intéressant de noter que lorsque la loi du paramètre taux sans risque r^* est changée en r alors ce dernier devient plus important que le taux de dividende en terme d'incertitude sur la variabilité du prix de l'option.

Mots-clés :Analyse de sensibilité, Indice de Sobol, ordre stochastique, Heston.

Bibliographie

M. Denuit, J. Dhaene, M. Goovaerts, and R. Kaas. *Actuarial Theory for Dependent Risks : Measures, Orders and Models*. Wiley, 2005.

A. Saltelli, M. Ratto, T. Andres, F. Campolongo, J. Cariboni, D. Gatelli, M. Saisana, and S. Tarantola. *Global Sensitivity Analysis : The Primer*. Wiley, 2008.

M. Shaked and J. Shanthikumar. *Stochastic orders*. Springer, 2007.

M. Shaked, M. Sordo, and A. Suarez-Llorens. A class of location-independent variability orders, with applications. *J. Appl. Prob.*, 47 :407–425, 2010.

[Ibrahima Niang; Université Lyon 1, ISFA, 50 avenue Tony Garnier, 69007 Lyon, France]
[niang.brahima@gmail.com –]
[Alexandre Janon; Université Lyon 1, ISFA, 50 avenue Tony Garnier, 69007 Lyon, France]
[alexandre.janon@univ-lyon1.fr – http://isfaserveur.univ-lyon1.fr/~janona/]

[Areski Cousin; Université Lyon 1, ISFA, 50 avenue Tony Garnier, 69007 Lyon, France]
[areski.cousin@univ-lyon1.fr –]

[Véronique-Maume Deschamps; Université Lyon 1, ISFA, 50 avenue Tony Garnier, 69007 Lyon, France]
[veronique.maume@univ-lyon1.fr –]